大西佐兵衛『雑題』の現代解について ～第 9 巻全 9 問～

Modern solutions for problems in “Zatsudai” by Sahei Onishi

吉岡倖佑 *3, 村田幹太 *1, 原本博史 *2, ○安部利之 *1
YOSHIOKA Kosuke*3, MURATA Kanta*1, HARAMOTO Hiroshi*2, ABE Toshiyuki*1
*1 愛媛大学教育学部
*2 愛媛大学データサイエンスセンター
*3 愛媛大学教育学部 2024 年度卒
*1Faculty of Education, Ehime University
*2Center for Data Science, Ehime University
*1Faculty of Education, Ehime University, Graduated in 2024

[要約]：愛媛県の和算家大西佐兵衛の編集した『雑題』全 30 巻から, 第 9 巻の全問題について解説する.

[キーワード]：和算 (Wasan, Japanese Mathematics), 2 次方程式 (Quadoratic Equations), 3 次関数の極値問題 (Extreme Value Problem for a cubic function), 相似 (Similarity), 楕円 (Elliptic curves), デカルトの円定理 (Descartes’ Circle Theorem), 課題研究 (Themed Research)

1 はじめに

論文 (吉平他, 2024) では, 大西佐兵衛の編集した『雑題』 の問題のうち第 10 巻の現代解について紹介したが, 今回は第 9 巻の全 9 題について扱う. 大西佐兵衛及び雑題については, (宮崎他, 2023) を参照いただきたい. 扱う問題については, 浅山氏によりまとめられた資料 (浅山, 2019) を基本的に土台としている. この資料では, 問題について, 問題文, 答曰く, 術文を現代語に翻訳したものが列挙してある. そのため, 和算の問題に初めて取り組む学生でも, 少しの経験で問題を理解しその解法を考察することができる. 一方で, 問題の抜粋や翻訳の段階もしくは原典の段階において, 術文と実際の解と齟齬が生じる場合がある. 問題に取り組む際には, 術文を導出することを目的としてはいるが, その術文が正しいものかどうかの検証も必要である. その検証においては, これまでの数学的知識の確認や術文に惑わされない正確な論証など, 現代の数学的問題の解決に必要な力の育成への貴重な機会が提供される.

今回扱う各問題の解説は第 2 節で小節に区切って与えている. なるべく予備知識を想定しないように心がけているが, 和算で頻繁に用いられる公式 (補題 2.1) やデカルトの円定理 (補題 2.2) は証明無しで用いている. ここで与えている解法以外にも様々な解法があるとは思われるが, 紙面の関係上, 執筆者の一人安部の主観に基づき解法を選択している. そのためわかりにくい解法もあると思われるが, ご容赦いただきたい.

谷本賢治先生には, 原稿に目を通し, 有用な指摘をして頂いたことに感謝する. また本論文で扱った問題のいくつかについては, 愛媛和算研究会の定例会において, 発表の機会を与えて頂いた. 問題に取り組み発表した学生達にあたたかなコメントをくださいました方をはじめ, ご参加いただいた方に, この場を借りて御礼申し上げたい.

2 現代解の解説 (第 9 巻)

この節では, 資料 (浅山, 2019) をもとに, 第 9 巻の全問について解説する. 第 9 巻については, (谷本, 2023) において, 和算解及び算変座標を用いた現代解が紹介されている. ここでは, 各問題について, 問題, 答え, 術文を紹介し, その現代解及び注意点, 補足について述べる.

2.1 第 9 巻第 1 問

問題 1. (問題 9-1)

(問題文) 図 1 のように, 長 − 平 = 14.7 寸, 平 + 高 = 69.3 寸の箱がある. この箱の体積が最大のときの平はいくらか。

(答え) 平 44.1 寸.

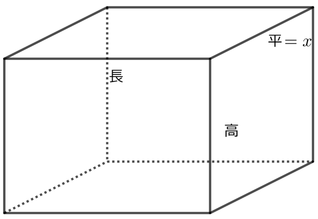

図 1. 問題 9-1 の配置

(術文) 長 − 平 = 又云数, 平 + 高 = 只云数, 只云数 − 又云数 = 極 とする. このとき,

$$平 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{極^2 + 3(只云数 \times 又云数)} + 極\right). \quad (2.1)$$

(解法). $x =$ 平とし, $A =$ 長−平 (> 0), $B =$ 平+高 (> 0) とおく. このとき, 長 $= x + A$, 高 $= B - x$ である. 従って, 箱の体積 V は

$$\begin{aligned} V = f(x) &= x(x + A)(B - x) \\ &= -x^3 + (B - A)x^2 + ABx \end{aligned}$$

で与えられる. この 3 次関数 $f(x)$ の極値問題を考えればよいので, まず $f(x)$ を微分する.

$$f'(x) = -3x^2 + 2(B - A)x + AB.$$

$A, B > 0$ より, $f'(x) = 0$ の判別式は $D/4 = (B - A)^2 + 3AB > 0$ である. よって, 2 次方程式 $f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解

$$x = \frac{(B - A) \pm \sqrt{(B - A)^2 + 3AB}}{3}$$

を持つ. 従って, x がこの 2 つの値であるとき, 関数 $f(x)$ は極値をとる. 増減表は省略するが, $f(-A) = f(0) = f(B) = 0$ であることと, x^3 の係数が負であることから,

$$x = \frac{(B - A) + \sqrt{(B - A)^2 + 3AB}}{3}$$

で極大であり, この極大値が $0 < x < B$ における $V = f(x)$ の最大値である. よって, 極 $= B - A$ であることより, 術文にある式 (2.1) が求める平の値であることがわかる.

術文の式に具体的な設定値を代入することで, 答えが導かれる. □

補足 1.1. この問題は標準的な 3 次関数の極値問題であり, 数学 II の範囲の内容で解くことができる. 微分法を用いた極値問題の解法については, 和算家達も用いており, 適盡 (てきじん) 法と呼ばれている.

2.2 第 9 巻第 2 問

問題 2. (問題 9-2)

(問題文) 今, 図 2 のように, 直角三角形内に楕円を容れる. 只云う股 17 寸, 長径 9 寸, 短径 5 寸のとき, 勾はいくらか.

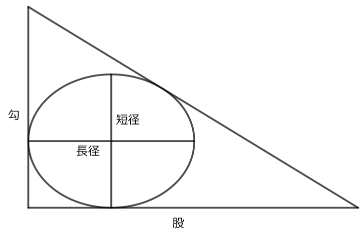

図 2. 問題 9-2 の配置

(答え) 勾 $7\frac{13}{16}$ 寸.

(術文) (2 股 − 長径) × 短径 = 実 とし,

$$\frac{実}{2(股 - 長径)} = 勾.$$

以下, 座標平面を用いた 2 通りの解法を紹介する. 解法 1 では, x 軸方向に拡大縮小することで, 楕円を円に変形する方法であり, 解法 2 は楕円の方程式を用いる方法である.

(解法 1). 長径 $= s$, 短径 $= t$, 勾 $= a$, 股 $= b$, 弦 $= c$ とする. また, 直角三角形の左下の頂点の座標を $(0, 0)$, 右下の頂点の座標を $(b, 0)$, もう 1 つの頂点の座標を $(0, a)$ とすることで, 直角三角形を座標平面に配置する. このとき変換 $(x, y) \mapsto (\frac{t}{s}x, y)$ によって, この直角三角形は $(0, 0)$, $(\frac{tb}{s}, 0)$, $(0, a)$ を頂点とする直角三角形に移るが, 内接していた楕円はこの直角三角形に内接する円に移る. この円の直径は t なので, (愛媛の算額, 2017, 補助定理 2) より

$$t = \tfrac{tb}{s} + a - \sqrt{\tfrac{t^2b^2}{s^2} + a^2}.$$

従って

$$\left(\tfrac{tb}{s} + a - t\right)^2 = \tfrac{t^2b^2}{s^2} + a^2$$

であり, 整理すると,

$$2\frac{abt}{s} - 2\frac{bt^2}{s} - 2at + t^2 = 0.$$

これより, $2(b-s)a = t(2b-s)$. 従って,

$$\text{勾} = a = \frac{t(2b-s)}{2(b-s)}$$

が得られる. これが術文の式である. □

(解法 2). (解法 1) のように座標平面に直角三角形を配置する. 簡単のため, $s = 2c$, $t = 2d$ とおく. このとき斜辺を含む直線の方程式は

$$y = -\frac{a}{b}x + a,$$

であり, 楕円の方程式は

$$\frac{(x-c)^2}{c^2} + \frac{(y-d)^2}{d^2} = 1$$

である. この 2 つの 2 次方程式から y を消去し, x について整理すると, $u = \frac{x}{bc}$ の 2 次方程式

$$\begin{aligned}&(a^2c^2 + b^2d^2)u^2 - 2(a^2c + bd^2 - acd)u \\ &+ (a-d)^2 = 0\end{aligned}$$

が得られる. 斜辺は楕円に接しているので, この 2 次方程式は重解をもつ. よってその判別式 $D/4$ は 0 である. 従って,

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a^2c + bd^2 - acd)^2 - (a^2c^2 + b^2d^2)(a-d)^2 \\ &= abd^2(2ac - ab + 2bd - 2cd) = 0\end{aligned}$$

となる. これを a について解くと

$$a = \frac{(2b-2c)d}{b-2c} = \frac{(2b-s)t}{2(b-s)}$$

が得られる. □

2.3 第 9 巻第 3 問

問題 3. (問題 9-3)

(問題文) 今, 図 3 のように, 大, 小円の接する間に累円を容れる. 只云う, 大円径若干, 小円径若干として, 累円径を得る術を問う.

(答え) 以下の通り.

(術文) 円径の 2 字を略す.

$$\frac{\text{大}}{\text{小}} = \text{極}$$

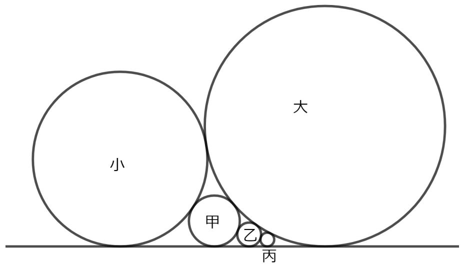

図 3. 問題 9-3 の配置

とし,

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{4\,\text{大} \times \text{小}}}{\text{小}} + (\text{極} + 1) = \text{甲法} \\ &(2\,\text{甲法} + 2) - \text{甲法} = \text{乙法}, \\ &(2\,\text{乙法} + 2) - \text{乙法} = \text{丙法}, \\ &(2\,\text{丙法} + 2) - \text{丙法} = \text{丁法}, \\ &\cdots\end{aligned}$$

逐々同様にして各法を求め, 大を通実として,

$$\frac{\text{大}}{\text{甲法}} = \text{甲}, \quad \frac{\text{大}}{\text{乙法}} = \text{乙}, \quad \frac{\text{大}}{\text{丙法}} = \text{丙}, \cdots.$$

この問題では, 和算においてよく知られている次の補題を用いる. 証明は省略する.

補題 2.1. (愛媛算額, 2017 : 補助定理 3) $r, s > 0$ とする. 半径 r, s の 2 つの円が互いに外接しているとする. このとき共通外接線において, 接点間の長さは $2\sqrt{rs}$ である.

(解法). 大円径 (大円の直径) を r, 小円径を s とおく. 大円と小円及びその 1 つの外接線 ℓ で囲まれた部分において, 大円, 小円, 及び接線すべてに接する円を C_1 とし, その直径を t_1 とおく. 以下, n 番目の累円 C_n を, 大円と円 C_{n-1} と接線 ℓ で囲まれた部分において, すべてに接する円として帰納的に定義する. 円 C_n の直径を t_n とおく.

補題 2.1 より, 大円と小円について, ℓ との接点間の長さは $\sqrt{rs}$ であり (直径であることに注意), 同様に大円と C_1 では $\sqrt{rt_1}$, 小円と C_1 では $\sqrt{st_1}$ である. 従って, $\sqrt{rs} = \sqrt{rt_1} + \sqrt{st_1}$ が得られる. この式を $\sqrt{st_1}$ で割れば,

$$\sqrt{\frac{r}{t_1}} = \sqrt{\frac{r}{s}} + 1 \tag{2.2}$$

を得る．今, 大円径と小円径の比を $u = \frac{r}{s}$ とおく．また, 大円径と円 C_n の直径の比を

$$u_n = \frac{r}{t_n}, \quad n = 1, 2, \cdots,$$

とおけば, (2.2) より,

$$\sqrt{u_1} = 1 + \sqrt{u}$$

が成り立つ．従って,

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 + \sqrt{\frac{r}{s}}\right)^2 = \frac{\sqrt{4rs}}{s} + \frac{r}{s} + 1 \\ &= \frac{\sqrt{4\,大小}}{小} + 極 + 1 \end{aligned}$$

である．

次に u_n について考える．求められているものは, C_n の直径を大円径及び小円径から導く式であるが, C_{n-1} を小円とみなすことで, 数列 $\{\sqrt{u_n}\}$ の漸化式

$$u_0 = u, \quad \sqrt{u_n} = 1 + \sqrt{u_{n-1}}, \quad n \geq 1 \tag{2.3}$$

が得られる．これは初項 $\sqrt{u}$, 交差 1 の等差数列なので, 容易に $\sqrt{u_n} = n + \sqrt{u}$ が成り立つことがわかる．従って,

$$u_n = (n + \sqrt{u})^2$$

であり,

$$t_n = \frac{r}{(n + \sqrt{u})^2}$$

が得られる． □

補足 3.1. 術文にある「$(2\,甲法 + 2) - 甲法 = 乙法$」では正しい乙法が求まらない．$u = u_1$ が甲法であり, u_2, u_3, u_4 がそれぞれ乙法, 丙法, 丁法に対応している．

2.4 第 9 巻第 4 問

問題 4. (問題 9-4)

(問題文) 今, 図 4 のように, 大小円の両円の間に累円 (その数は分からないが仮に 3 個描く) がある．大円径若干, 小円径若干, 末円径若干として, 容円数はいくらか．

(答え) 下の通り．

(術文)

$$\sqrt{\frac{大}{末}} = 定$$

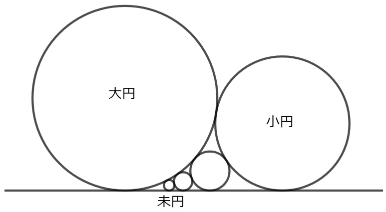

図 4. 問題 9-4 の配置

とする．この時,

$$定 - \sqrt{\frac{大}{小}} = 容円数.$$

(解法). 第 3 問より, 末円が n 番目の容円とすれば, 大円径を r, 小円径を s, 末円径を m, とすることで,

$$m = \frac{r}{(n + \sqrt{u})^2}, \quad u = \frac{r}{s}$$

が得られる．よって, 容円数 n は

$$n = \sqrt{\frac{r}{m}} - \sqrt{\frac{r}{s}} \tag{2.4}$$

である． □

補足 4.1. (2.4) の右辺は整数にならないように思われるが, ここでは, 末円径が与えられていることが前提であるので, 右辺は自然数値となる．

2.5 第 9 巻第 5 問

問題 5. (問題 9-5)

(問題文) 今, 図 5 のように, 正方形内を斜で隔て, 甲, 乙, 丙円を容れる．$甲径 + 乙径 + 丙径 + 2\,斜 + 方面$ の六和があるとき, 方面はいくらか．

(答え) 下の通り．

(術文) $方面 = \frac{六和}{5}$.

(解法). $方面 = x$, 甲円, 乙円, 丙円の直径をそれぞれ R, S, T とし, 図 6 のようにおく．また $斜 = s$ とし, 図 6 において, $\mathrm{CE} = a$, $\mathrm{CF} = b$, $\mathrm{EF} = c$ とおく．このとき (愛媛算額, 2017：補助定理 2) より

$$\begin{aligned} R &= x + (x - a) - s = 2x - a - s, \\ S &= x + (x + b) - (s + c) = 2x + b - c - s. \end{aligned}$$

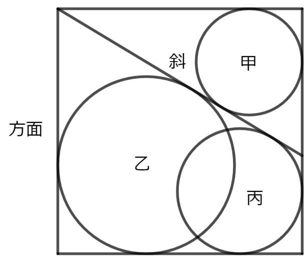

図 5. 問題 9-5 の配置

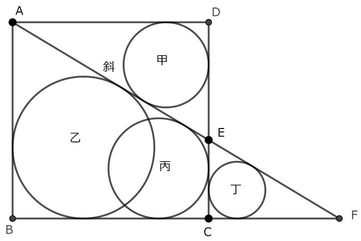

図 6. 問題 9-5 の解法の配置

次に丙円の面積を求める．丁円と EF の接点を P, 丙円と EC の接点を Q とすると, (愛媛算額, 2017：補助定理 16) より,

$$T = 2\mathrm{CQ} = 2\mathrm{EP} = a + c - b.$$

以上より,

$$\begin{aligned} \text{六和} &= R + S + T + 2u + x \\ &= 2x - a - u + 2x + b - c - u \\ &\quad + a + c - b + 2u + x \\ &= 5x. \end{aligned}$$

よって術文の式が得られる．□

補足 5.1. この問題は (浅山, 2019) において,「問題文がなく, 意味がはっきりしません．略します」と記載があった．原典 (大西, 不明) においても, 答曰くや術文の記載がなく, 解義が始まっている．その点は (谷本, 2023) で指摘され, 補足されている．上の, 術文は, 解義の最後の式である．

2.6 第 9 巻第 6 問

問題 6. (問題 9-6)

(問題文) 今, 図 7 のように, 甲と乙の 1 辺が与えられたとき, 戊の 1 辺を求めよ．

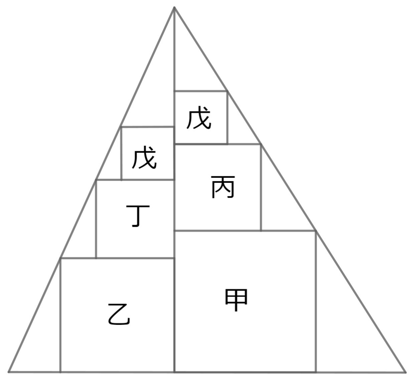

図 7. 問題 9-6 の配置

(答え) 下の通り
(術文) 天 $= \sqrt{\frac{\text{甲}}{\text{乙}}}$, 地 $=$ 天 $+ 1$ とおくと,

$$\text{戊} = \frac{\text{甲}}{\left(\text{地} - \frac{\text{天}}{\text{地}}\right)^2}. \tag{2.5}$$

(解法). 図 7 では, 次の配置 (図 8) を見出すことができる．この配置において, △AKJ, △AHG, △AFD は

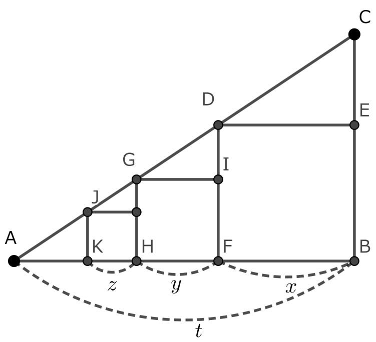

図 8. 問題 9-6 の解法の配置

相似なので,

$$(t - x) : x = (t - x - y) : y = (t - x - y - z) : z.$$

これより,

$$yt = x(t - x), \quad zt = x(t - x - y)$$

が得られる．これから y を消去して,

$$(x - z)t^2 - 2x^2 t + x^3 = 0$$

が得られる．この t についての 2 次方程式の解は

$$t=\frac{x^2\pm x\sqrt{xz}}{x-z}=\frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}\pm\sqrt{z})}{x-z}$$

である．符号が $-$ の場合は, $t<x$ となり, 不適であり,

$$t=\frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{z})}{x-z}=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{z}} \tag{2.6}$$

を得る．ここで, $x_1=$ 甲, $z=$ 戊, $t=$ 中 とし, (2.6) を適用すると,

$$t=\frac{x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}-\sqrt{z}}$$

が得られ, $x_2=$ 乙, $z=$ 戊, $t=$ 中 とし, (2.6) を適用すれば,

$$t=\frac{x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}-\sqrt{z}}$$

となる．従って,

$$\frac{x_1\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}-\sqrt{z}}=\frac{x_2\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}-\sqrt{z}}$$

が成り立つ．よって,

$$(x_1\sqrt{x_1}-x_2\sqrt{x_2})\sqrt{z}=(x_1-x_2)\sqrt{x_1x_2}$$

となる．以上より, $a=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}$ とおけば,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{z}{x_1}}&=\frac{(x_1-x_2)\sqrt{x_2}}{x_1\sqrt{x_1}-x_2\sqrt{x_2}}\\&=\frac{(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})\sqrt{x_2}}{x_1+\sqrt{x_1x_2}+x_2}\\&=\frac{a+1}{a^2+a+1}\\&=\frac{a+1}{(a+1)^2-a}\\&=\frac{1}{a+1-\frac{a}{a+1}}\end{aligned}$$

となり両辺を 2 乗し, 更に x_1 をかけることにより,

$$z=\frac{x_1}{(a+1-\frac{a}{a+1})^2}$$

が得られる．天 $=a$, 地 $=a+1$ より, これが求める (2.5) であることがわかる． □

補足 6.1. (浅山：2019) では, この問題について「問題文がないので略します」と記載があったが, 原典 (大西, 不明) をあたることで, 問題, 答え, 術文を得た.

補足 6.2. この問題の解法は, 3 角形の相似と 2 次方程式のみで得られている．しかし, 2 次方程式の解のうち一方のみが適していることに気付くことが少し難しいと思われる．和算解では, このような吟味をせずに, 当然のように適解を選択している.

2.7 第 9 巻第 7 問

問題 7. (問題 9-7)

(問題文) 今, 図 9 のように, 円内を斜で隔て, 4 円を容れる．乙円径 4 寸, 丙円径 3 寸のとき, 丁円径 1 寸のとき, 甲円径はいくらか.

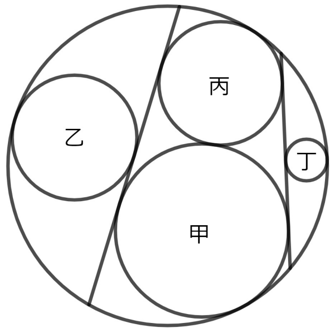

図 9. 問題 9-7 の配置

(答え) 甲円径 6 寸.

(術文) 円径を略す.

$$\frac{丙}{\frac{丙}{\sqrt{乙\times丁}}-1}=甲円径.$$

補足 7.1. 乙円と丁円は, 共通外接線と外円と甲円, 丙円の無い部分で接しているもののうち直径が最大になるものである．従って, それぞれの円と共通外接線との接点はちょうど外円と共通外接線との 2 つの交点の中点である.

(解法). 外円の半径を R, 甲円, 丙円の半径を r,s とする．甲円, 丙円の 1 つの共通外接線と外円の中心 O との距離を t とする．また共通外接線と甲円, 丙円とのそれぞれの接点の間の距離を ℓ とする．このとき

$$\begin{aligned}\ell=&\sqrt{(R-r)^2-(r-t)^2}\\&+\sqrt{(R-s)^2-(s-t)^2}.\end{aligned}$$

甲円と丙円は接しているので, 補題 2.1 より, $\ell=2\sqrt{rs}$ である．よって,

$$\begin{aligned}&2\sqrt{rs}\\&=\sqrt{R^2-2(R-t)r-t^2}+\sqrt{R^2-2(R-t)s-t^2}.\end{aligned}$$

また, この式の逆数をとって,

$$\frac{(R-t)(s-r)}{\sqrt{rs}} = \sqrt{R^2-2(R-t)r-t^2} - \sqrt{R^2-2(R-t)s-t^2}.$$

従って,

$$\sqrt{R^2-2(R-t)r-t^2} = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{rs} + \frac{(R-t)(s-r)}{\sqrt{rs}}\right).$$

よって,

$$R^2-2(R-t)r-t^2 = rs + (R-t)(s-r) + \frac{(R-t)^2(s-r)^2}{4rs}.$$

整理すると,

$$\frac{(r+s)^2}{4rs}(R-t)^2 + (2R-r-s)(R-t) + rs = 0.$$

$X = R-t$ とおけば, X は, 2 次方程式

$$X^2 + \frac{4rs(2R-r-s)}{(r+s)^2}X + \frac{4r^2s^2}{(r+s)^2} = 0 \qquad (2.7)$$

の解である. 今, t はひとつの共通外接線を固定したときの, 外円と共通外接線との距離なので, 2 つある共通外接線各々に対し t が定まる. そしてそれらの t に対し, $R-t$ は, 乙円の直径 (乙と書く) と丁円径の直径 (丁と書く) であることがわかる. 従って, 乙, 丁は方程式 (2.7) の 2 つの解である.

特に, 解と係数の関係より,

$$\text{乙丁} = \frac{4r^2s^2}{(r+s)^2}$$

である. 従って, $\sqrt{\text{乙丁}}(\text{甲}+\text{丙}) = \text{甲丙}$ が得られ, これを甲についてとくと,

$$\text{甲} = \frac{\sqrt{\text{乙丁}}\text{丙}}{\text{丙}-\sqrt{\text{乙丁}}} = \frac{\text{丙}}{\frac{\text{丙}}{\sqrt{\text{乙丁}}}-1}$$

を得る. □

補足 7.2. この問題は神壁算法上巻 P45(藤田 1807) にある問題である.

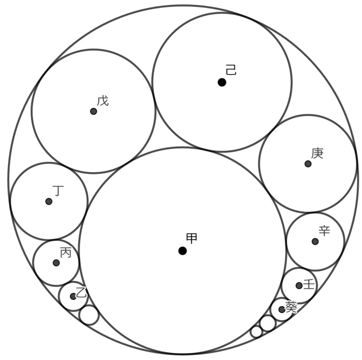

図 10. 問題 9-8 の配置

2.8 第 9 巻第 8 問

問題 8. (問題 9-8)

(問題文) 今, 図 10 のように, 円内に累円を容れる. 只云う, 外円径若干, 甲円径若干, 乙円径若干とし, 累円径を得る術を問う.

(答え) 下の通り.

(術文) $\frac{\text{外}}{\text{乙}} = \text{天}$, $\frac{\text{外}}{\text{甲}} = \text{地}$ とし,

$$\sqrt{4\left(\frac{\text{外}^2}{\text{甲乙}} - (\text{天}+\text{地})\right)+1} = \text{人},$$

$$2(\text{地}-1) = \text{増率},$$

$$\text{天}+\text{地}-\text{人} = \text{丙径法},$$

$$2\,\text{丙径法}+\text{増率}-\text{天} = \text{丁径法},$$

$$2\,\text{丁径法}+\text{増率}-\text{丙径法} = \text{戊径法},$$

$$2\,\text{戊径法}+\text{増率}-\text{丁径法} = \text{己径法},$$

$$\cdots$$

逐次, 同様にして各法を求め,

$$\frac{\text{外径}}{\text{各法}} = \text{各円径}.$$

補足 8.1. (浅山, 2017) では,

$$\sqrt{4\left(\left(\frac{\text{外}}{\text{甲乙}}\right)^2 - (\text{天}+\text{地})\right)+1} = \text{人},$$

とあるが, 正しくは,

$$\sqrt{4\left(\frac{\text{外}^2}{\text{甲乙}} - (\text{天}+\text{地})\right)+1} = \text{人},$$

である.

ここではデカルトの円定理を用いた解法を与える．デカルトの円定理の証明は省略する．

補題 2.2. 図 11 において，円 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{O}$ の半径をそれぞれ，a, b, c, R とおく．このとき，

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{R}\right)^2=2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{R^2}\right).$$

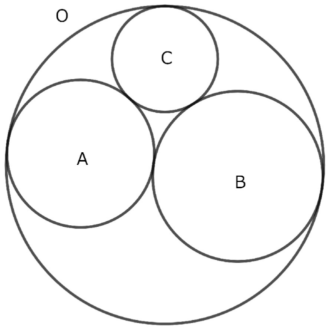

図 11. デカルトの円定理の配置

(解法). 補題 2.2 を $\frac{1}{c}$ に関する 2 次方程式と考えると，

$$\frac{1}{c^2}-2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right)\frac{1}{c} +2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{R^2}\right)-\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right)^2=0.$$

よって，

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right)\\&\quad\pm\sqrt{2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right)^2-2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{R^2}\right)}\\&=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{R}\right)\pm2\sqrt{\left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{aR}-\frac{1}{bR}\right)}.\end{aligned}$$

従って，両辺に R をかけると，

$$\frac{R}{c}=\left(\frac{R}{a}+\frac{R}{b}-1\right)\pm2\sqrt{\left(\frac{R}{a}-1\right)\left(\frac{R}{b}-1\right)-1}$$

が得られる．ここで，$A=\frac{R}{a}-1, B=\frac{R}{b}-1, C=\frac{R}{c}-1$ とおけば，

$$C=A+B\pm2\sqrt{AB-1}$$

となることがわかる．この符号の違いは，図 11 において，A, B, O に接する円は C ともう 1 つあることに起因する．

今，甲円を O_0，外円を O_∞ とし，墨円を $\mathrm{O}_n, n\in\mathbb{Z}$ とおく．このとき，図 11 において，円 $\mathrm{A}=\mathrm{O}_0$, $\mathrm{B}=\mathrm{O}_n$, $\mathrm{O}=\mathrm{O}_\infty$ と考えると，円 O_{n+1} の半径が

$$\frac{R}{r_{n+1}}=\left(\frac{R}{a}+\frac{R}{r_n}-1\right)-2\sqrt{\left(\frac{R}{a}-1\right)\left(\frac{R}{r_n}-1\right)-1}$$

で定まっているとすれば，円 O_{n-1} の半径が

$$\frac{R}{r_{n-1}}=\left(\frac{R}{a}+\frac{R}{r_n}-1\right)+2\sqrt{\left(\frac{R}{a}-1\right)\left(\frac{R}{r_n}-1\right)-1}$$

であることがわかる．従って，辺々足すことで，3 項間漸化式

$$\frac{R}{r_{n+1}}-2\frac{R}{r_n}+\frac{R}{r_{n-1}}=2\left(\frac{R}{a}-1\right),\quad n\in\mathbb{Z}\quad(2.8)$$

が得られ，これが術文の各法に関する式を与えている．実際に，図 10 において，O_0 を乙円，O_1 を丙円と順次定めると，各円径法はこの漸化式によって，順次計算できる．

また，仮定より，

$$\frac{R}{r_2}=\frac{R}{a}+\frac{R}{b}-1-2\sqrt{\left(\frac{R}{a}-1\right)\left(\frac{R}{b}-1\right)-1}$$

であるが，術文では，$\frac{R}{b}=$ 天，$\frac{R}{a}=$ 地，$2(\frac{R}{a}-1)=$ 増率，$\frac{R}{b}=$ 丙径法，

$$1+2\sqrt{\frac{R^2}{ab}-\frac{R}{a}-\frac{R}{b}}=\text{人}$$

に対応している． □

補足 8.2. (谷本, 2023) では，(平田, 2022) に沿って算変座標を用いた解法を与えている．

補足 8.3. 3 項間漸化式 (2.8) において，$u_n=\frac{R}{r_n}-\frac{R}{r_{n-1}}$, $n\geq 2$ とおけば，$u_{n+1}=u_n+2(\frac{R}{a}-1)$ となり，数列 (u_n) は等差数列である．よって，一般項 $\frac{R}{r_n}$ は具体的に求めることができる．ただ，ここでは一般項は明示しない．

2.9　第 9 巻第 5.5 問

問題 9. (問題 9-5.5)

(問題文) 今，図 12 のように，全円弧内に甲円，乙円，丙円，丁円を入れる．全円径，甲円径，矢が若干のとき，乙円径，丙円径，丁円径を得る術を問う．

(答え) 下の通り．

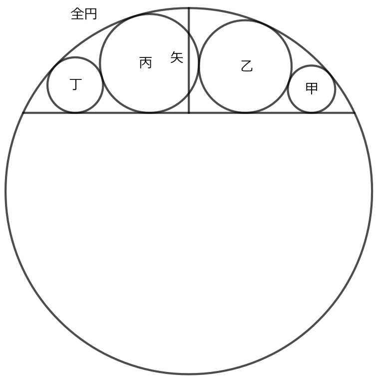

図 12. 問題 9-5.5 の配置

$$(\text{術文})\ 全-矢=天,\ 全+矢=地,\ 2\tfrac{地}{天}=因法,$$

$$\sqrt{全\,(矢-甲)}=商$$

とする．

$$\frac{天}{甲}=甲法,\quad \frac{地}{甲}-\frac{2\,商}{甲}-1=乙法,$$

$$因法\times乙法-甲法-2=丙法,$$

$$因法\times丙法-乙法-2=丁法$$

とする．

$$乙=\frac{天}{乙法},\quad 丙=\frac{天}{丙法},\quad 丁=\frac{天}{丁法}.$$

(解法). 全円の半径を R とし, 矢 $=\gamma$ とする．問題設定と合わせるため, $\gamma<R$ と仮定する．この問題では, 初等幾何的に解こうとすると, 全円の中心と弦と弧に接する円 (甲円や乙円等) の中心の位置関係で場合分けとなる．その場合分けを明示するために, 座標空間で考える．弦を含む直線を x 軸とし, 全円は x 軸と, $(\pm\sqrt{R^2-(R-\gamma)^2},0)$ で交わっているとする．また全円の中心は y 軸上の点 $(0,\gamma-R)$, $\gamma-R<0$ にあるとする．

以下, 術文を導くための解説をする．そのために乙円から出発する．乙円の中心を (s_0,t_0), $t_0>0$ と, 甲円, 丙円の中心をそれぞれ (s_{-1},t_{-1}), (s_1,t_1) とする．ここで, $s_1<s_0<s_{-1}$ としておく．

甲, 乙, 丙円それぞれはこの順で接しており, 全て x 軸に接しているので, 補題 2.1 より,

$$s_{-1}-s_0=2\sqrt{t_{-1}t_0},\quad s_0-s_1=2\sqrt{t_0t_1}$$

が成り立つ．よって,

$$s_{-1}=s_0+2\sqrt{t_{-1}t_0},\quad s_1=s_0-2\sqrt{t_1t_0} \tag{2.9}$$

である．

またすべて全円にも接しているので,

$$s_i^2+(t_i+R-\gamma)^2=(R-t_i)^2$$

が得られ,

$$s_i^2=(\gamma-2t_i)(2R-\gamma),\quad i=-1,0,1 \tag{2.10}$$

を得る．ここで, 乙円と丙円に固定して考えると,

$$(s_0^2-2\sqrt{t_0t_1})^2=s_1^2=(\gamma-2t_1)(2R-\gamma) \tag{2.11}$$

となり, $\sqrt{t_1}$ の方程式として整理すると

$$\begin{aligned}&(2t_0+2R-\gamma)\sqrt{t_1}^2-2\sqrt{t_0t_1}s_0\\&-t_0(2R-\gamma)=0\end{aligned} \tag{2.12}$$

となる．この $\sqrt{t_1}$ の 2 次方程式としての判別式は

$$\begin{aligned}D/4&=t_0s_0^2+t_0(2R-\gamma)(2t_0+2R-\gamma)\\&=t_0(\gamma-2t_0)(2R-\gamma)+t_0(2R-\gamma)(2t_0+2R-\gamma)\\&=2Rt_0(2R-\gamma)\end{aligned}$$

である．以上より,

$$\sqrt{t_1}=\frac{\sqrt{t_0}s_0\pm\sqrt{2Rt_0(2R-\gamma)}}{2t_0+2R-\gamma}.$$

ここで, s_0 の符号を

$$\varepsilon_0=\begin{cases}1 & s_0>0,\\ 0 & s_0=0,\\ -1 & s_0<0\end{cases}$$

によって定めると, $s_0=\varepsilon_0\sqrt{(\gamma-2t_0)(2R-\gamma)}$ となるので, $2R>\gamma-2t_0$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\sqrt{t_1}&=\frac{\sqrt{t_0(2R-\gamma)}(\varepsilon_0\sqrt{\gamma-2t_0}+\sqrt{2R})}{2t_0+2R-\gamma}\\&=\frac{\sqrt{t_0(2R-\gamma)}(\varepsilon_0\sqrt{\gamma-2t_0}+\sqrt{2R})}{(\sqrt{2R}+\sqrt{\gamma-2t_0})(\sqrt{2R}-\sqrt{\gamma-2t_0})}\\&=\frac{\sqrt{t_0(2R-\gamma)}}{\sqrt{2R}-\varepsilon_0\sqrt{\gamma-2t_0}}.\end{aligned}$$

次に乙円と甲円に固定して考えると, 上記と議論で乙円と丙円を入れ替えた議論ができる．このときの違

いは, (2.9) における $2\sqrt{t_0 t_1}$ の前の符号だけであり, そのことに注意すれば,

$$\sqrt{t_{-1}} = \frac{\sqrt{t_0(2R-\gamma)}}{\sqrt{2R}+\varepsilon_0\sqrt{\gamma-2t_0}}.$$

となることがわかる.

最後に,

$$\sqrt{\frac{2R-\gamma}{t_{\pm 1}}} = \sqrt{\frac{2R}{t_0}} \mp \varepsilon_0\sqrt{\frac{\gamma-2t_0}{t_0}}$$

であり, 両辺を 2 乗して,

$$\frac{2R-\gamma}{t_{\pm 1}} = \frac{2R+\gamma-2t_0}{t_0} \mp 2\varepsilon_0\frac{\sqrt{2R(\gamma-2t_0)}}{t_0}$$

が得られる. これより,

$$\frac{2R-\gamma}{2t_1} + \frac{2R-\gamma}{2t_{-1}} = 2\frac{2R+\gamma}{2t_0} - 2 \tag{2.13}$$

が成り立つことがわかる.

ここで, 文字に置き換えれば, $2R=$ 全, $\gamma=$ 矢 である. 従って, $2R-\gamma=$ 天, $2R+\gamma=$ 地, $2\frac{2R+\gamma}{2R-\gamma}=$ 因法, $\sqrt{2R(\gamma-2t_{-1})}=$ 商 であり, $\frac{2R-\gamma}{2t_0}$ が乙法, $\frac{2R-\gamma}{2t_{-1}}$ が甲法, $\frac{2R-\gamma}{2t_1}$ が丙法である. よって,

$$\text{甲法} + \text{丙法} = \text{因法} \times \text{乙法} - 2$$

となり, 術文の式が得られる.

以上の議論では, s_0 の符号は限定しなかった. それは, 丙円の中心を (s_0, t_0), とし, 丁円の中心を (s_1, t_1), 乙円の中心を (s_{-1}, t_{-1}) として同様の議論をするためである. そうすると, s_0 の符号にかかわらず, (2.13) が成り立ち, 術文の式

$$\text{乙法} + \text{丁法} = \text{因法} \times \text{丙法} - 2$$

が得られることがわかる. □

補足 9.1. (谷本, 2023) で指摘されているように, この問題は, 原典 (大西, 不明) では, (浅山, 2017) の問題 9-5 と 問題 9-6 の間にある問題である. ただ, 問題文, 答曰く, 術文の記載がなく, 解義のみが記載されている. (谷本, 2023) では, 問題文, 答曰く, 術文を推測し, 記載しており, ここではその記述に従った. 問題番号は, (浅山, 2017) に合わせるために, 問題 9-5.5 として設定しているが, 追加の問題ということで, 最後に解説を与えた.

3　終わりに

本論文では, 2023 年 7 月 30 日に開催の第 49 回愛媛和算研究会の定例会において発表した解法を含めた形でまとめている. 今回紹介した問題は, 雑題の第 9 巻の全 9 問であるが, すべての問題の解説を作成することに多くの時間が必要であったため, 第 10 巻の後での公表となった. 現在愛媛和算研究会では, 第 11 巻〜第 20 巻の読みを行っている. 今後, その成果も公表する予定であるが, 継続して紹介したいと考えている.

今回取り組みの結果, 今回取り上げたほとんどの問題について高等学校までの知識で対応可能であると考えられる. その意味では, 問題の数値や設定を変えれば, そのまま高等学校までの教材に使用することも可能であり, 本論文が 1 つの教材のヒントとなることを期待したい.

参考文献

藤田貞資 (1807) , 神壁算法上巻, 京都大学貴重資料デジタルアーカイブ
https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028551?page=37

大西佐兵衛 (不明) , 『雑題』, 愛媛県立図書館 (所蔵).

愛媛算額 (2017) : 愛媛の算額研究〜現代解法を通して〜, 平田浩一, 谷本賢治 編, 愛媛和算研究会.

浅山秀博 (2019) : 『雑題』三十巻 (大西佐兵衛著) を読むにあたって (その 1), 愛媛和算研究会.

谷本 賢治 (2023) : 『雑題』巻九 ～ 巻十を読む [第 6 回], 第 49 回愛媛和算研究会発表資料.

沖本貫成, 吉岡倖佑, 村田幹太, 吉平善晴, 保木隆之介 (2023) : 「雑題」7-1, 9-1, 9-3, 10-2, 10-5 の現代解, 第 49 回愛媛和算研究会発表資料.

宮崎智也, 吉岡倖佑, 原本博史, 安部利之 (2023) : 大西佐兵衛『雑題』の現代解について〜第 8 巻第 1 問から第 4 問〜, 科学教育研究センター紀要 **2**, 17–22, 愛媛大学教育学部附属科学教育センター.

吉平善晴, 保木隆之介, 牟田口正虎, 原本博史, 安部利之 (2024) : 大西佐兵衛『雑題』の現代解について〜第 10 巻全 5 問〜 , 科学教育研究センター紀要 **3**, 9–15, 愛媛大学教育学部附属科学教育センター.