コラッツ予想に関する双子の系列について

On series of Collatz's twins for Collatz conjecture

栗林音菜 *1, 高畔聖奈 *1, 藤本裕暁 *1, 都田一馬 *1, ○安部利之 *2

KURIBAYASHI Nena*1, TAKAAZE Sena*1, FUJIMOTO Hiroaki*1, MIYAKODA Kazuma*1
ABE Toshiyuki*2

*1 愛媛大学教育学部 (2018 年度卒), *2 愛媛大学教育学部

*1Faculty of Education, Ehime University (Graduation 2018 school years)

*2Faculty of Education, Ehime University

[要約]：コラッツ予想は, 数学の分野において非常に初等的な主張であるにも関わらず未解決である予想の 1 つである．本稿では, コラッツ予想を具体的に検証する際に現れるコラッツ双子というものを考え, その系列について分かったことを紹介する．コラッツ予想は, 設定が初等であるため, 高等学校における課題研究の題材としてもこれまで取り上げられているが, 本稿での視点からも課題研究のテーマとして興味深い題材を与えると考えている．

[キーワード]：コラッツ予想 (Collatz conjecture), 未解決問題 (Open problem), 初等整数論 (Elementary number tehory), 研究指導 (Research Guidance)

1　はじめに

本稿では, 数学の分野における未解決問題として有名な「コラッツ予想」の検証の際に現れるある性質をもつ連続する自然数についての研究内容を紹介する．コラッツ予想に関しては, これまで多くの機会で高等学校の課題研究のテーマとして取り上げられており, 執筆者の一人もえひめサイエンススキルアッププログラムの数学・情報分野において参加校の研究テーマとしてたびたび紹介してきた．ここでは, コラッツ予想に関し, 余り議論されていないであろう「コラッツ双子」について紹介し, 研究成果を述べる．本研究成果は, 平成 30 年度の愛媛大学教育学部の卒業研究論文「コラッツ予想に関する研究」(栗林他 3 名, 2019) としてまとめられており, 少し古い成果ではあるが, 教育学部科学教育研究センターの紀要の初号を通して広く公開したい．

2　コラッツ予想

コラッツ予想とは, ローター・コラッツの提出した予想であり, その主張は次のようなものである

予想 2.1. (**コラッツ予想**) *自然数 n に対し, n が偶数であれば, 2 で割り, n が奇数であれば, 3 倍して 1 を足して得られる自然数を $C(n)$ とおく．任意の自然数 n に対し, ある自然数 k が存在して, $C^k(n) = 1$ が成り立つ．*

写像 $C : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を**コラッツ変換**と呼ぶ．ここで $\mathbb{N}$ は自然数全体の集合である．コラッツ予想は, $3n + 1$ 問題, 角谷の問題, シラキュースの問題など様々な呼び名も持ち, 変換 C の性質の解析や予想の一般化などを含め, 現在までに多くの研究がなされている (Lagarias (2011a, 2011b, 2012) に網羅的にまとめられている).

設定の容易さから, 予想そのものは小学生や中学生に対しても, 大きな問題なく理解できる内容である．また自然数 n, m に対し, $m = C(n)$ となる状況を $n \to m$ と表すと, 自然数が 1 になる様子は, 次のように有向グラフとして,

$$10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

のように表されるため, コラッツ予想を検証するデータの作成や表示も比較的容易であることが特徴的である．実際に, 具体的な数がどのように変化していくかについては, ある程度は手計算でも可能で, 大きな自然数についても, エクセル等の表計算ソフトを用いて, プログラミングすることで実行できる．本研究ではエクセルや Maxima を用いた．

このように, コラッツ予想は, 一見「簡単そう」に見える予想であるが, その証明は簡単ではなく, コラッツの予想の提出以来, 多くの研究者によって証明が試みられているにも関わらず, 現在でも解決の糸口が見つかっていない状況である．2019 年には, フィールズ賞受賞者のテレンス・タオ氏によってコラッツ予想に関

する論文 (Tao, 2022) が公表されており, そこではコラッツ予想は「ほとんどの場合」正しいことが述べられている.

コラッツ予想に関する高校生たちの課題研究をみると, その多くは 1 に辿り着く様子や傾向を調べることを方針としている. 本卒業研究でも, まずは小さい数からその様子をエクセル等を援用しながら観察し, 数の変遷の様子をとらえようとした. そのデータを羅列したところ, 例えば

$$12 \to \ \ 6 \to \ \ 3 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$
$$13 \to 40 \to 20 \to 10 \to 5 \to 16 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1$$

の様に連続する自然数で等しい回数のコラッツ変換の繰り返しで 1 となるものが散見されることが分かった. そこでまず, 自然数 n に対し, $C^k(n) = 1$ を満たす最小の自然数 k を n の**長さ**と呼ぶことにし, $\ell(n)$ と表した. そして連続する自然数 $(n, n+1)$ で $\ell(n) = \ell(n+1)$ を満たすものをコラッツ双子と呼ぶことにした. しかし重要な点は, コラッツ予想は, 任意の自然数 n に対し $\ell(n)$ が定まることを主張していることである. 現在のところ, おおよそ 5×2^{60} 以下の自然数について, コラッツ予想が成立することが知られているので, 具体的な計算では大きな問題は無いのであるが, コラッツ双子の系列の議論において, コラッツ予想が正しいことを仮定することを避けるために, コラッツ双子の定義を次のように修正した.

定義 2.2. n を自然数とする. ある自然数 k が存在し, $C^k(n) = C^k(n+1)$ が成り立つとき, 組 $(n, n+1)$ を**コラッツ双子**と呼ぶ. より一般に, s 個の連続する自然数 $(n, n+1, \cdots, n+s-1)$ について, ある自然数 k が存在し, $C^k(n) = \cdots = C^k(n+s-1)$ が成り立つとき, $(n, n+1, \cdots, n+s-1)$ を**コラッツ s つ子**と呼ぶ.

つまり $n, n+1$ が等しい回数のコラッツ変換の繰り返しによって, 途中で等しい自然数になる場合にコラッツ双子と呼び, それが最終的に 1 になるかどうかについては仮定しない. この定義により, 具体的に与えられた連続する自然数がコラッツ双子をなすかどうかの検証も以下の命題 3.1 のように比較的効率的になる.

3 コラッツ双子

改めて, $n \leq 30$ までの, $\ell(n)$ の表を提示する (表 1).

表 1. 長さ $\ell(n)$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\ell(n)$	1	2	8	3	6	9	17	4	20	7
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\ell(n)$	15	10	10	18	18	5	13	21	21	8
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\ell(n)$	8	16	16	11	24	11	112	19	19	19

この表からもわかるように, 1 から 30 までの間に, コラッツ双子は

$$(12,13), \quad (14,15), \quad (18,19), \quad (20,21), \quad (22,23),$$
$$(28,29), \quad (29,30)$$

が現れている. このうち, $(28, 29, 30)$ はコラッツ 3 つ子である. コラッツ双子は, 数を大きくしていっても, 高い頻度で現れる. またコラッツ 3 つ子のように, 連続して長さが変わらない自然数も頻繁に現れ, 例えば,

$$1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999 \tag{3.1}$$

はすべて長さが 51 であり, 9 つ子を構成する.

コラッツ双子について, まず次がわかる.

命題 3.1. 任意の自然数 n に対し, 連続する自然数 $(8n+4, 8n+5)$ はコラッツ双子である. 特にコラッツ双子は少なくとも 8 個置きに現れ, 無限個存在する.

(証明). $8n+4$ に関し, $8n+4 \to 4n+2 \to 2n+1 \to 6n+4$. $8n+5$ に関し, $8n+5 \to 24n+16 \to 12n+8 \to 6n+4$ でどちらも 3 回のコラッツ変換で $6n+4$ にたどりつく. 従って, $8n+4, 8n+5$ はコラッツ双子である. □

このように, コラッツ双子がコラッツ変換の繰り返しで等しい自然数になるとき, **合流**すると呼ぶことにすると, $8n+4, 8n+5$ は常に 3 回で合流する. もちろん, 合流後はコラッツ変換で同じ様子で振る舞う.

自然数 n について, $n \equiv a \pmod 8$ であれば, $(n, n+1)$ は 8 を法として, $(a, a+1)$ と合同となる. 逆に 8 を法として $(a, a+1)$ と表される連続する自然数の組全体の集合を $[a, a+1]$ と表すことにする. 例えば, $(8n+4, 8n+5) \in [4, 5]$ であり, $[4, 5]$ に属する組は, 命題 3.1 より, $(4, 5)$ を除き, すべてコラッツ双子である.

その他の, $a = 0, \cdots, 7$, $a \neq 4$ について, $[a, a+1]$ に属するコラッツ双子について考える．例として, $(n, n+1) \in [5,6]$ を考えると, $n = 8m+5$ と表される．$(n, n+1)$ を同時に k 回コラッツ変換を繰り返したときの結果を,

$$(n, n+1) \xrightarrow{C^k} (C^k(n), C^k(n+1))$$

のように表すと,

$$(8m+5, 8m+6) \xrightarrow{C^4} (3m+2, 18m+16)$$

となることがわかる．ここで $m \equiv 0 \pmod 4$ のとき, $m = 4h$ とおけば,

$$(12h+2, 72h+16) \to (6h+1, 36h+8) \to (18h+4, 18h+4)$$

が成り立ち, 結果として, $[5,6]$ に属する組 $(8m+5, 8m+6)$ のうち, $m = 4h$ である $(32h+4, 32h+5)$ がコラッツ双子であることが分かる．同様の方針で, 1000 までの範囲に現れるコラッツ双子をもとに, コラッツ双子となる条件を調べたところ, 以下の表が得られた (表 2).

結果として, 表のように命題 3.1 を含め, コラッツ双子を与える無限系列を与えることができた．この表は 1000 までに現れるコラッツ双子から得られる無限系列であるため, 1000 を超えた所からも新たな系列が得られる．例えば, $(1175, 1176) \in [7,8]$ はこの表には現れない．そして, 1 つ双子が現れるたびに系列が得られることがわかる．

4 コラッツ双子の系列

次に 8 を法として連続する自然数の合流の様子を調べたところ, $[4,5]$ の組の様に簡単に合流の様子が観察できなかった代わりに, 次のようなことが分かった．

命題 4.1. *自然数 n に対し, n が 8 を法として, $1, 2, 5, 6$ と合同であるとき, $(n, n+1)$ はコラッツ変換の繰り返しで再び連続する 2 つの自然数となる．*

(証明). $n \equiv 1 \pmod 8$ の時にコラッツ変換を作用してみると, $n = 8m+1$ とおけば

$$(8m+1, 8m+2) \to (24m+4, 4m+1)$$
$$\to (12m+2, 12m+4) \to (6m+1, 6m+2)$$

のように連続する自然数 $(6m+1, 6m+2)$ になることがわかる．同様に, $(8m+2, 8m+3)$ については 2 回のコラッツ変換で $(12m+4, 12m+5)$, $(8m+5, 8m+6)$ については 3 回のコラッツ変換で $(6m+4, 6m+5)$, $(8m+6, 8m+7)$ については 2 回のコラッツ変換で $(12m+10, 12m+11)$ となる． □

表 2. $(8m+a, 8m+a+1) \in [a, a+1]$ **が双子になる条件**

系列	m の条件	系列	m の条件
$[0,1]$	$30 \pmod{128}$	$[3,4]$	$52 \pmod{128}$
$[0,1]$	$46 \pmod{64}$	$[3,4]$	$64 \pmod{1024}$
$[0,1]$	$59 \pmod{128}$	$[3,4]$	$73 \pmod{128}$
$[0,1]$	$66 \pmod{512}$	$[3,4]$	$93 \pmod{16384}$
$[0,1]$	$105 \pmod{2048}$	$[3,4]$	$105 \pmod{256}$
$[0,1]$	$118 \pmod{256}$	$[3,4]$	$118 \pmod{256}$
$[1,2]$	$6 \pmod{16}$	$[4,5]$	$0 \pmod{1}$
$[1,2]$	$8 \pmod{64}$	$[5,6]$	$0 \pmod{4}$
$[1,2]$	$18 \pmod{32}$	$[5,6]$	$3 \pmod{16}$
$[1,2]$	$24 \pmod{128}$	$[5,6]$	$5 \pmod{8}$
$[1,2]$	$26 \pmod{64}$	$[5,6]$	$15 \pmod{64}$
$[1,2]$	$32 \pmod{512}$	$[5,6]$	$23 \pmod{32}$
$[1,2]$	$59 \pmod{128}$	$[5,6]$	$63 \pmod{256}$
$[1,2]$	$74 \pmod{128}$	$[5,6]$	$78 \pmod{512}$
$[1,2]$	$96 \pmod{256}$	$[5,6]$	$95 \pmod{128}$
$[1,2]$	$105 \pmod{2048}$	$[5,6]$	$97 \pmod{512}$
$[1,2]$	$106 \pmod{256}$	$[6,7]$	$1 \pmod{8}$
$[1,2]$	$120 \pmod{256}$	$[6,7]$	$2 \pmod{4}$
$[2,3]$	$0 \pmod{2}$	$[6,7]$	$7 \pmod{32}$
$[2,3]$	$39 \pmod{256}$	$[6,7]$	$11 \pmod{16}$
$[2,3]$	$73 \pmod{128}$	$[6,7]$	$31 \pmod{128}$
$[2,3]$	$105 \pmod{256}$	$[6,7]$	$47 \pmod{64}$
$[3,4]$	$12 \pmod{32}$	$[6,7]$	$48 \pmod{256}$
$[3,4]$	$16 \pmod{128}$	$[6,7]$	$124 \pmod{8192}$
$[3,4]$	$36 \pmod{64}$	$[7,8]$	$78 \pmod{512}$
$[3,4]$	$39 \pmod{256}$	$[7,8]$	$117 \pmod{8192}$
$[3,4]$	$48 \pmod{256}$		

命題 4.1 からは, $n \equiv 1 \pmod 8$ の場合, $n = 8m+1$ とおけば, $(n, n+1)$ がコラッツ双子であることと, $(6m+1, 6m+2)$ がコラッツ双子であることは同値であることが分かる．更に m を 4 を法としてみると, $(6m+1, 6m+2)$ は, 系列 $[1,2]$, $[3,4]$, $[5,6]$, $[7,8]$ に属する連続する自然数の組となるため, $[1,2]$ に属する連続する自然数は, 3 回のコラッツ変換で 4 種類の系列

に属する連続する自然数になることがわかる．同様に, $[2,3]$ に属する連続する自然数については, 2 回の変換で, 系列 $[0,1]$, $[4,5]$ の 2 種類, $[5,6]$ については, 3 回の変換で, 系列 $[0,1]$, $[2,3]$ $[4,5]$, $[6,7]$ の 4 種類, $[6,7]$ については, 2 回の変換で, 系列 $[2,3]$, $[6,7]$ に属する 2 種類の連続する自然数になることがわかる．

一方で, $n \equiv 0,3,4,7 \pmod 8$ の場合について, $n \equiv 4$ の場合は $(4,5)$ を除き $(n,n+1)$ は常にコラッツ双子であるが, $n \equiv 0,3,7$ の場合には $(n,n+1)$ が次にどのような連続する自然数になるかは容易にはわからない．例えば, $n = 8m$ の場合,

$$\begin{aligned}&(8m, 8m+1) \to (4m, 24m+4)\\ \to&(2m, 12m+2) \to (m, 6m+1)\end{aligned}$$

となり, 次にどのような連続する自然数になるのかは m に大きく依存していることが分かる．実際に具体的に $n \leq 80000$ までにおいて, 系列 $[0,1]$ または $[3,4]$ に属する連続する自然数が, コラッツ変換の繰り返しで, 次に連続する自然数となったとき, その組が次にどの系列に属するかを調べたところ, $[i,i+1]$, $(i = 0,\cdots,7)$ のいずれの系列においても属するものがあることが分かった．$[7,8]$ の場合は, $[7,8]$ 以外の系列に現れるが, これも n をもっと大きくすると現れると考えている．

このように, 系列 $[i,i+1]$ に属する連続する自然数が, 次に連続する自然数になったとき, それがどの系列に属するかは 3 つの場合に分類され, $[4,5]$ のように連続する自然数にならず合流する場合, $[i,i+1]$, $i = 1,2,5,6$ のように次の系列が限定されている場合, $[i,i+1]$, $i = 0,3,7$ のように次の系列が決まらない場合となる．このことは, コラッツ変換 C の性質と大きな関係がありそうではあるが, そこまで詳しく研究していないため, 今後の研究の題材の 1 つと考えている．

5 まとめ

本研究では, コラッツ予想に関して, 連続する自然数が等しい回数で 1 となる (合流する) ものの分布について考察した．本論文では, 詳しく述べなかったが, s つ子についても興味深い観察がある．本稿では例として, (3.1) のように, 9 つ子の例を紹介したが, 実際には, かなり長い n つ子も存在する．例えば, $10^{31}+1$ から $10^{31}+31$ は 31 つ子を構成する．また, n が大きくなれば, その前後で $\ell(n)$ は比較的近い値で分布することも観察できる．この点について詳細な研究は行っていないが, コラッツ変換 C の性質によって, $\ell(n)$ と n 間に何らかの関係があることが導かれるのではないかと考えている．特に, 次のことが予想される．

予想 5.1. 任意の 2 以上の自然数 s について, コラッツ s つ子が存在する．

もちろん解決が難しい問題ではあると思うが, コラッツ双子の無限系列をたくさん作ることができることからも, この予想が成立することも十分考えられる．これは素数砂漠 (任意の自然数 s について, $p+s<q$ を満たす隣り合う素数 p,q が存在する) に似た性質である．べったりと, コラッツ双子が存在する区間があることを示唆しており, 実際証明されれば, 非常に興味深い現象であると考えている．

コラッツ予想に関する計算はエクセルを始めとする表計算ソフトにおいて容易に調査でき, 高校生における探求の課題として使用しやすいものである．しかし, 実際に課題として取り上げると, そのデータを眺めた時に, 研究の方向性や着地点を探ることはなかなか容易ではないものであることも感じている．本研究内容は, これまでの研究とは異なった視点での研究となっており, まだまだ研究の途上である．従って, 本研究成果は, いろいろな機会において情報を発信し, 高校生を含め研究を紹介することで更なる進展を期待したい．

参考文献

栗林他 3 名 (2019)：コラッツ予想に関する研究, 平成 30 年度愛媛大学教育学部卒業論文.

J. Lagarias (2011a) : The $3x+1$ Problem: An Annotated Bibliography (1963–1999), arXiv: math/0309224v13.

J. Lagarias (2011b) : The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem, ed. J. C. Lagarias, AMS.

J. Lagarias (2012) : The $3x+1$ Problem: An Annotated Bibliography II, (2000–2009), arXiv: math/0608208v6.

T. Tao (2022) : Almost all orbits of the Collatz map attain almost bounded values, arXiv: 1909.03562v5.