



室の中で実験してその解決を数学的に図る」という課題を共有する。教室の実験において、プロジェクタとスクリーンとの距離  $x$  を  $1\text{m}$ ,  $1.5\text{m}$ ,  $2\text{m}$ , … と離しながら投影し、映像の縦と横の長さを調べる。投影された映像の縦、横の比が常に同じであることを確認した後、今回の課題を解決するには、距離  $x$  と映像の横の長さとの関係を調べれば十分であることに気づかせ、映像の横の長さを  $y$  として、 $x$  と  $y$  の関係を表やグラフに表し、最終的に  $y$  を  $x$  の式で表して、目的の  $y$  に対応する  $x$  の値を求め、講堂でのプロジェクタとスクリーンとの間の最適距離を決定するというものであった。

## b. 研究授業 2

(学級) 第 2 学年, (授業者) 宇都宮憲二

(単元) 一次関数 「ウェーブ問題」

(ねらい) 事象の中の数量関係を一次関数とみなし、表・式・グラフを関連付け、根拠を明らかにして論理的に説明し、課題を解決する。

(展開の概略)

「運動会で、全校生徒 384 名が一列に並んでウェーブを行うと、どれだけの時間がかかるか?」、教室で実験して予測しようというものであった。まず四人ずつ人を増やしながらウェーブを行い、その所要時間を計測する。そのデータを表やグラフに整理することで、「変化の割合がほぼ一定である」ことや「グラフがほぼ一直線になっている」ことを見だし、人数を  $x$ 、その所要時間を  $y$  として、 $y$  は  $x$  の一次関数で表すことができることとみなしてその関係式を求め、 $x=384$  に対応する  $y$  の値を算出し、問題解決を図った。

これら二つの研究授業は、対象学年、扱った題材、比例関係/比例ではない一次関数の関係など、いろいろな違いはあれ、大筋としては、実生活の事象を“一次関数とみなして”問題解決するという流れはどちらも同じであった。これまで全国的には、実生活の事象における二つの数量を一次関数の関係にあるとみなして問題解決する授業実践は多くあり、今回の展開も軌を同じくするものであり一般的であった。しかし、二つの題材を同時に比較できる形で授業公開したケースは稀であり、教材に潜む数学的な構造の違いが顕在化されたよい機会となった。

顕在化された数学的な構造の違いとは、事前に把握

できるものではあるが、それぞれ対象とする二つの数量の關係に、プロジェクタ問題であれば構造的に比例關係が認められるのに対して、ウェーブ問題は、問題となっているのは「運動会当日の、一人、二人と実施していく中での時間経過のグラフ」であって、実際には当日の活動によって決まるものである。正確にはどんな数学的な構造があり、実際にどのようなグラフとなって表現されるかは、本質的には事前には不明であるという事象である。つまり、実生活の事象を一次関数とみなして問題解決に取り組む際には、対象とする事象のもつ数学的な構造が事前に判明しているものと、判明していないものの二つがある。

典型的には、その事象における伴って変わる二つの数量に一次関数の関係があると予めわかっているもの(タイプ A) と、二つの数量の關係が事前にはわからず、その關係が不明なため実験・観察を通してデータを集め、「変化の割合がほぼ一定」や「グラフがほぼ一直線になりそうだ」とする特徴を見だし、そこに一次関数の關係があるとみなして数学的に処理することが出来ると考えるもの(タイプ B) の二つである。

## 2. 三つ目のタイプのみなし教材

一次関数とみなして問題解決する場面においては、タイプ A とタイプ B の中間のタイプも存在する。

例えば、次のような問題である。

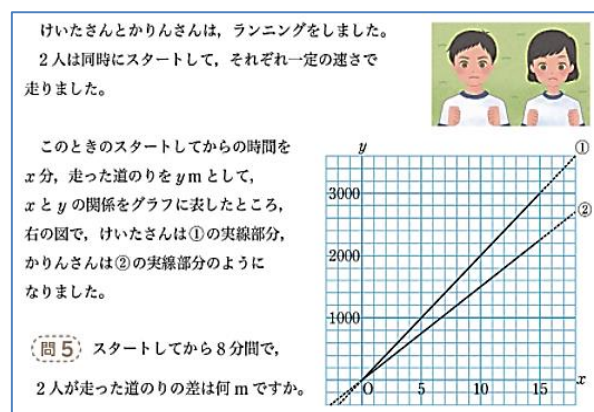


図 1 : 比例の利用問題 (啓林館, 2021, p.139)

図 1 の問題は、途中途中のランニングにおいてその速さは実際には一定ではなく、実際のランニングの時間と距離の關係については事前には不明である。その意味ではタイプ B と言えるものである。しかしながら、単純化、理想化を働かせ、数学的に処理をして数学的

な解決を得たいために、速さを一定と仮定、宣言し、事前にその問題の構造に一次関数の関係があることを明示しており、タイプ A と言うこともできる。つまり、一次関数とみなして問題解決する教材には、本質的にその事象に一次関数の関係があるとはっきり言えないものの、そうした関係を仮定したり、宣言したりすることで、「一次関数とみなして」処理するもの（タイプ AB）も存在する。

### 3. 「関数」領域における実生活場面での問題解決

一次関数とみなして問題解決する教材のタイプをタイプ A, B, AB の三つに分類できるとしたが、実際にこの三つで、対象となる教材をすべて尽くして分類することができるかについての検討が必要である。これまでの全国の教育実践の中で、対象となる教材は限りなく多く実践されており、そのすべてにおいて確かめることは難しい。

そこで、平成 19 年から実施されている全国学力・学習状況調査において「関数」領域における実生活場面での問題をすべて取り上げ、三つのタイプに分類可能かを確かめた（表 1）。紙面の都合上、一つ一つの判断理由は割愛するが、例えば、2007 年出題の「水温の変化」であれば、「水を熱したときの水温の変化」を対象としており、科学的に熱した時間と水温との関係には一次関数の関係があることが確認できるものであり、タイプ A と判断した。同年実施の「図書館への往復」の問題は、登場人物が家を出てからの時間と家からの距離の関係が線形的であることを、グラフを提示する

ことで保障しており、タイプ AB と判断した。2017 年出題の「ダム貯水量と節水」の問題は、ある特定の日からの  $x$  日後のダムの貯水量に関心があり、 $x=0$  から  $x=5$  までのダムの貯水量を調べ、貯水量の推移にどのような傾向があるかを問題にしたものであり、タイプ B と判断した。それらの結果が、表 1 である。

これまでの全国学力・学習状況調査における実生活の場面を想定した「関数」領域の問題に対して、タイプ A, B, AB の三つで落ちや重なりなくすべてを分類できることが、表 1 で確認できた。また、タイプ B が他のタイプの問題と比べて少ないこともわかった。

## III. みなし方についての検討

### 1. これまでの実践の問題点

一次関数とみなして問題解決する教材に三つのタイプがあるにもかかわらず、その問題解決の実際はほとんどの場合で、

- (1) 課題の共有
- (2) 提示データ or 実験・観察によるデータの検討
- (3) 表・グラフから「一次関数とみなす」了解
- (4) 一次関数とみなした数学的な処理による問題解決の実行
- (5) ふりかえり

といった同じ流れの中で学習を進められるのが一般的である。こうした実践の中で解決の困難さを生み出しているのが、確実な問題解決を行うためにデータは

表 1：実生活の場面を想定した「関数」領域の問題（2017～19 年実施の全国学力・学習状況調査）

Type A			Type AB			Type B		
事象の構造が事前に明白						事象の構造は事前には不明		
事象の構造に潜在的に比例関係が存在する			理想化、単純化によって、変化の割合を一定とみなすことで処理可能					
実施年度	問	タイトル	実施年度	問	タイトル	実施年度	問	タイトル
2007 (H19)	5	水温の変化	2007 (H19)	6	図書館への往復	2014 (H26)	3	ウェーブ
2008 (H20)	1	身長を推定	2009 (H21)	3	電球形蛍光灯のよさ	2017 (H29)	3	ダムの貯水量と節水
2008 (H20)	3	ベニヤ板と釘	2013 (H25)	1	ウォーキング			
2008 (H20)	5	富士山の気温	2016 (H28)	3	電気自動車とガソリン車			
2010 (H22)	1	エクササイズ	2018 (H30)	3	ダイヤグラム			
2010 (H22)	3	Tシャツのプリント料金	2019 (H31)	6	冷蔵庫			
2011 (H23)	1	ペットボトルのキャップ						
2013 (H25)	3	水温の変化と気温の変化						
2015 (H27)	1	プロジェクター						
2020 (R2)	6	紙バック						
2021 (R3)	7	砂時計						

※比例（二乗に比例、反比の比例を含む）

※国立教育政策研究所（2021）をもとに筆者が整理作成

多ければ多いほどよいと考える一方で、データが多ければ多いほどその事象から得られる真の値のデータが子どもたちにとってわかりにくくなり、多くのデータをどのように適切に扱って問題解決すればよいか不明になるという実態である。多くの実践で、データがたくさんあるにもかかわらず、よさそうなたった二つのデータを選び、グラフを決定づけ、伴って変わる二つの変数の関係式を求め問題解決をしている。このような二つのデータの抽出のしかたは、教材の特徴や数学のよさを生かしたのではなく、どちらかと言うと主観的で“適当な”数学的な処理になってしまっているものである。

## 2. 主観によらないみなし方の検討

実験・観察などを通したデータにおいては誤差を含むデータがいくつか得られていると考えた方が現実である。真の値のデータを求めて、たくさんのデータを集めるわけであるが、集めれば集めるほど、誤差を含んだデータも含まれ、どれが真の値を最もよく表現しているデータであるかを見極めることが難しい。データがたくさん得られた際、どのように数学的に処理をして問題解決していくのかについて、ここで整理する。ここで言う数学的な処理とは、主観によらず、他者との間で、みなし方の方法についてその方法の妥当性が共有され、基本的に、同じ方法を用いて同じ結果を得ることができるという意味で客観的で他者において再現可能な方法を意味するものである。そのときしか通用しないと行ったものではない方法である。

### a. データのスクリーニング

複数データが存在する場合、そのデータがすべて適切な方法で正確に得られたデータであれば、それらのデータはすべて同価値と捉え、平等に公平に数学的に処理していかねばならない。外れ値と疑われるような、他のデータの値と比べて極端に異なっている値のデータがあったとしても、そのデータの収集のしかたに問題がないのであれば、そのデータを削除するなどの特別扱いはすることなく、他のデータと同様に扱うのが基本である。しかし、明らかに測り方に異常があると認められるようなデータであれば、それらは除外し、残ったデータで伴って変わる二つの数量の関係式を求めていく。

前述の研究授業 1「プロジェクタ問題」では、教室

内の実験によって6つの  $x, y$  の組を得たが、どの  $x, y$  の組を用いればよいか議論になった(表2)。そこで、この実験ではプロジェクタがスクリーンから離れれば離れるほど、その投影の四隅はぼやけてしまい長さを測るとき正確でない可能性があることが話題になり、データの組は二つで十分であることも考慮し、四隅がはっきり測れているであろう  $x=100, 150$  のときの  $x, y$  の組が採用され、関係式  $y=0.7x+3$  を得た。

表2：研究授業1におけるデータ

$x$ [cm]	100	150	200	250	300	350
$y$ [cm]	73	108	143	170	213	248

このような過程を経て、データのスクリーニングを行い、データの質的な価値の違いに注目して多くの  $x, y$  の組から真の値を表しているであろうデータを協議、合意して問題解決を遂行していく活動は、これからの複雑で不確実な時代を生きるためには有意義な数学的活動である。このように、データのカテゴリカル的な性質を検討してデータを吟味し精選する態度も大切にしたい。

### b. 最小二乗法によるみなし方

データのスクリーニング作業も終了し、同価値のデータが複数存在する場合、それらの  $x, y$  の組を座標系に表し、点  $(x, y)$  の集まりに最もよく当てはまる一本の直線(以下、回帰直線と呼ぶ)を求め、その直線を利用して  $x$  から  $y$  を推測する活動を行う。そのとき、回帰直線を求める数学的手法として一般的に用いられるものが「最小二乗法」である。

最小二乗法は、残差の二乗和が最小になる最もよく当てはまる一本の直線を求める方法である。具体的には、 $n$  個のデータ  $(x_i, y_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$  に対して、その回帰直線を  $y=ax+b$  としたとき、残差の二乗和である

$$D = \sum_{i=1}^n \{(ax_i + b) - y_i\}^2$$

を最小とする回帰直線の係数  $a, b$  を求め、その回帰直線の方程式を決定する。 $D$  は  $a$  の二次関数となり、高校数学の「二次関数の最小値」に係わる問題である。高校以上の数学の学習をもって標準的に求めることができる。逆に言うと、中学生にはこれは未習事項であり、扱うべき内容とは言えないものであり、中学校

数学科の学習内容として「最小二乗法」で回帰直線を求めることは、数学的には一般的ではあっても、残念ながら適当ではない。

### C. メジアンを利用したみなし方

散らばりのあるデータに対して、中学生にとってこれまでの既習の考えを利用して自然に考えることができる当てはまりのよい直線（正確には回帰直線とは言いがたいため、本稿では以下「推定直線」と呼ぶ）の求め方を考える必要がある。

実験・観察で得たデータをすべて平等に扱い、特定の  $x$  に対しても複数の  $y$  の値があるような形でデータが複数個ある場合、これらのデータの中により真の値に近いものとそうでないものとが混在している。これら複数のデータからより真の値に近いと判断されるデータを見つけ出さないといけない。

中学生の学習経験の中でその活動に有用なものが、「データの活用」で学習した散らばりのあるデータに対する代表値である。代表値の中でも、極端な大きさのデータの影響を受けやすい平均値ではなく、データが多ければ多いほど真の値の付近でデータは出現しやすいと考えられるため、中央値（メジアン）を利用して散らばりのあるデータの中で利用可能な代表的なデータを導出するのは、中学生にとって理解可能で自然な数学的な見方・考え方ではないかと思われる。

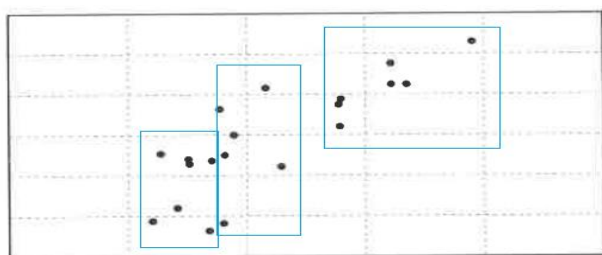


図2：三つの群に分けた散らばりのあるデータ

その具体的な方法が、東京学芸大学附属国際中等教育学校数学研究会（2015）（以下、数学研究会と省略）にて記述されている（pp.104-109）。まず図2のように、データを個数がほぼ等しい三つの群に分け、群ごとに  $x$  についての中央値と、 $y$  についての中央値を求め、その群のそれぞれの中央値データを求める。第1群と第3群の中央値データを通る直線を仮にひき（図3の①）、第2群の中央値データからその仮直線  $l$  に向けて縦軸に平行な線分をひき、その線分を3等分する（図

3の②）。3等分した点のうち、直線  $l$  に近い点を通り直線  $l$  に平行な直線  $L$  をひき（図3の③）、その直線  $L$  を推定直線とする方法である。

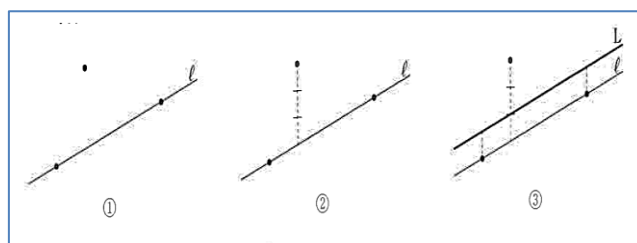


図3：3つのメジアンを利用した近似直線のひき方  
（出典：数学研究会，2015，p.106）

散らばりのあるデータでありグラフに表したとき散布図的になる場合、中央値を利用する方法は、中学生にとって既習の内容である「データの活用」に関わるものと判断され得るものである。中学生にとって納得のしやすいものであり、数学の中でも他領域の学習を総合的に利用しながら問題解決することは、実際の活用力を育成する意味でも有意義である。

### d. 隣接平均によるみなし方

実験・観察を行ってデータを収集する際、特定の  $x$  に対する  $y$  の真の値はただ一つあるのが一般的であるが、一回の実験・観察で偶然にその真の値が得られているという保障はない。よって、真の値を得るために、特定の  $x$  において複数回の実験・観察を繰り返して、「測定の平均」の考えを使って特定の  $x$  ごと  $y$  の値の平均値をとり、その平均値をその特定の  $x$  の値に対応する  $y$  の値として扱い、検討を進めていくことがある。その際のグラフは散布図的なものではなく、一つの  $x$  に対して、ただ一つの  $y$  が対応したデータが得られ折れ線グラフのように表現される。データが表している点の推移、山と谷が数多くあることが、中学生にとって一直線のグラフとみなすことに困難を生み出す。それを解消する中学生の自然な発想として「平均の考えを利用すれば、凸凹を一様にならすことができる」と考え、隣接する各点列の平均をとり、グラフの増減を抑制していくことが提案されることがある。 $n$  個の点列であれば  $n-2$  回の一連の平均作業を行うことで2個の点列にすることが可能であり、中学生にとって主観的ではなく数学的な方法によって現時点でよく当てはまると考えられる推定直線を見いだすことができる（図4）。

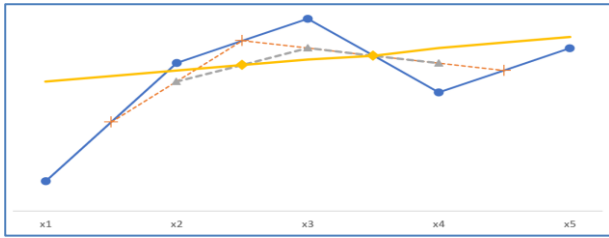


図4：平均の考えを利用した近似直線

ただし、このやり方でも  $x$  ,  $y$  の関係式は得られ推定を行うことはできるが、 $n$  個のデータを平等に扱っているとは言えない。平均を繰り返し算出する過程において、扱われるデータの頻度は端のデータは少なく中央よりのデータは多くなっており、データを必ずしも平等に扱っていない実態がある。中学生の問題解決においてこのデメリットについて言及する必要はなく、学習者たちがこの時点、この集団において最適と考える方法を合意しそれを適用しながら問題解決することに価値をおき評価することで十分であろう。

e. 二群に分けて平均を利用するみなし方

散らばりのあるデータに対して平均の考えを利用してその推定直線を求めるとき、中学生が発想し得るものとして、データの個数がほぼ等しい二つの群、前半、後半に分け、それぞれの群の平均について考えるものがある。前半、後半それぞれの群の平均を用いて、散らばりのあるデータを2つのデータの座標で代表して表現し、推定直線を求める方法である。

f. 三群に分けて平均を利用するみなし方

平均の考えを利用して推定直線を求める方法として、中学生にも適用可能と思われるもう一つの方法が、データの個数がほぼ等しい前半、中盤、後半の三つの群に分け、それぞれの群の平均を用いて推定直線を求めるものである。平均して得られた三つのデータ点を利用して、図3のやり方を適用し、残差の影響をなるべく少なくした推定直線を求める。

3. 五つのみなし方の比較

データが3個以上のとき、既習事項を利用した推定直線の求め方について下記の五つの方法を整理した。

- ア 隣接平均を利用した直線
- イ 2群の平均を利用した直線

- ウ 3群の平均を利用した直線
- エ 2群のメジアンを利用した直線
- オ 3群のメジアンを利用した直線

回帰直線を求める場合、最小二乗法によってその回帰直線を求めるのが、数学的には一般的であり確かな方法である。しかし、中学生にそれが適用できないとき、これら五つの内、どの方法を利用して推定直線を求めるのが適当であろうか？

実際には、データの分布の特徴によって適する方法は変わると考えられるため、五つの内これが最も優れた方法である指摘できるものはない。とは言え、具体的なデータにこれらの五つの方法を適用したとき、最小二乗法によって得られる回帰直線  $y=mx+n$  とどれくらい異なるかについて調べた。

まず、 $-10 \leq C \leq 10$  の範囲で乱数発生する整数  $C$  を用いた関数  $y_i = 10x_i + 15 + C$  を用意し、 $x_i = i$  ( $1 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{N}$ ) に対する10個の  $y_i$  のデータセットを作成した(表3)。

表3：乱数を利用して作成した10個のデータセット

1	16	44	40	45	74	82	86	91	95	124
2	25	41	41	65	62	71	79	86	99	106
3	16	41	54	54	61	74	76	103	109	112
4	33	38	43	63	66	85	95	86	114	121
5	15	27	52	61	63	65	79	102	100	110
6	35	38	55	60	68	68	94	100	105	109
7	32	39	46	64	56	71	92	93	109	105
8	27	34	38	47	70	66	93	103	102	125
9	29	35	37	52	74	65	76	90	110	110
10	28	35	47	52	62	76	83	87	111	116

それぞれのデータセットごとに五つの方法を適用し得られた推定直線  $y=ax+b$  の定数  $a, b$  と比較する回帰直線の定数  $m, n$  を整理したものが、表4である。最小二乗法による回帰直線の  $x$  の係数  $m$  と五つの方法による推定直線の  $x$  の係数  $a$  との差と、及び、回帰直線の定数項  $n$  と推定直線の定数項  $b$  との差の二つを標準化して比較するため、二つの差を該当の回帰直線の係数に対する割合を求め、評価式

$$\sqrt{\left(\frac{a-m}{m}\right)^2 + \left(\frac{b-n}{n}\right)^2}$$

で得られる指標(距離)を使って、どれくらい最小二乗法による回帰直線と異なっているかを比較した(表5)。この指標(距離)は値0に近いほど、二つの係数  $a, b$  が二つの係数  $m, n$  と距離的に近いことを表す。

表4：最小二乗法による回帰直線の係数  $m$ ,  $n$  と五つの方法による推定直線の係数  $a$ ,  $b$

	最小二乗法		隣接平均		2平均		3平均		2メジアン		3メジアン	
	$m$	$n$	$a$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$	$a$	$b$
1	10.39	12.53	10.72	12.84	10.36	12.72	10.00	14.47	10.20	9.40	7.29	32.26
2	8.55	20.47	7.44	27.07	8.28	21.96	8.76	19.12	9.00	14.00	8.29	23.26
3	10.08	14.53	9.18	17.99	9.92	15.44	10.14	14.63	9.80	24.60	9.71	19.07
4	10.02	19.27	10.32	18.36	10.32	17.64	9.86	19.87	8.60	17.20	10.86	16.12
5	10.13	11.67	8.35	21.84	9.52	15.04	10.38	10.35	10.00	22.00	10.43	6.31
6	8.86	24.47	9.36	20.97	8.80	24.80	8.86	24.56	9.00	28.00	9.57	17.69
7	8.98	21.33	9.75	15.84	9.32	19.44	9.05	20.93	9.40	17.80	10.00	15.50
8	11.01	9.93	12.13	2.31	10.92	10.44	11.00	10.17	13.00	-1.00	9.71	14.57
9	9.59	15.07	8.64	19.43	8.96	18.52	9.95	13.18	10.60	5.20	10.71	12.57
10	9.88	15.33	9.70	15.01	9.96	14.92	9.71	16.43	8.00	23.00	10.86	11.95

表5：最小二乗法による回帰直線に対する比較指標

	隣接平均	2平均	3平均	2メジアン	3メジアン
1	0.040	0.015	0.159	0.251	1.602
2	0.348	0.080	0.070	0.320	0.140
3	0.254	0.064	0.009	0.693	0.314
4	0.055	0.089	0.035	0.178	0.183
5	0.890	0.295	0.116	0.886	0.460
6	0.153	0.015	0.004	0.145	0.288
7	0.272	0.097	0.020	0.172	0.296
8	0.774	0.052	0.024	1.115	0.482
9	0.306	0.238	0.131	0.663	0.203
10	0.028	0.028	0.074	0.535	0.241

表5を見ると、いずれの方法も他の方法と比べて回帰直線に近くなることがあることが確認できる。その中でも3平均による方法が優れているように見えるが、それは表3のデータの作り方に依存していると思われる。乱数Cは-10以上10以下の範囲内での発生であり、 $x$  値が大きいくところではその誤差の影響は小さくなり、2群よりも3群のときの方が誤差の少ないデータを有効利用できており正確さが増していると考えられるからである。また、関数  $y=10x+15+C$  を利用してデータを発生させており、基本的に変動が大きくないデータの作り方となってしまうため、極端に大きさが異なるデータがなく、平均を利用して推定直線を出すことが優位であったと思われる。

総じて、どの方法を利用して推定直線を求めるかについては、問題の事象の特徴や実験・観察の方法の特徴、ならびに、得られたデータの分布の様子に対して、生徒たちが妥当と考える方法を選択するのがよい。しかしその一方で、教師として事前に考えておくべきは、

○目視でよいので、散らばりのあるデータに直感的に極端なデータや異常なデータがなければ平均の考えを利用し、もしそのようなデータがあればメジアン

の考えを利用した方が堅実であると発想すること  
 ○十分なデータの個数があれば3群に分けより詳細に、そうでなければ2群で考えると発想すること  
 ○折れ線に対して平均の考えを利用するとき、隣接で考えるか、群に分けて考えるかは、生徒たちの納得感を優先して選択すること

等を考えて問題解決を運営展開するとよいと考える。

### Ⅲ. 数学のよさを生かしたみなす授業展開

一次関数とみなす教材には三タイプあることは前述した通りである。教材のタイプごとに応じて数学科としての問題解決の展開方法を考えるべきである。

#### 1. タイプA・ABの場合

タイプAとタイプABの場合、事前にその事象に一次関数とみなせる構造があると確認できたり共有できたりすることがその特徴である。

予め一次関数とみなせるとしながら、実験・観察において無計画にデータが多いようだとその処理に困る。一次関数とみなせることが事前に確認できれば、数学的には2個のデータを集中的に正確に収集できれば十分である。数学に精通すれば、効率的な選択判断が可能となり、それが数学のよさの一つである。

数学のよさを感じながら問題解決をするためには、タイプA・ABの場合であれば、すぐに実験・観察に取り組むのではなく、まず対象とする事象にひそむ構造や与えられた条件を十分に検討・理解し、一次関数としてみなして問題解決することができることを確認し、その問題解決のために必要な二つのデータをどのように正確に得るかを検討し、「測定の平均」などの考えを利用しながらなるべく真の値に近い二つの

データを実験・観察から得て、推定直線を求め、問題解決をしていく展開がよいと考えられる（図5）。

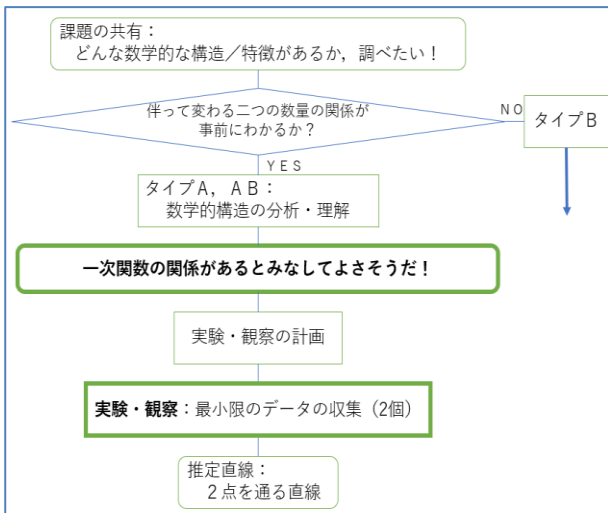


図5：タイプA・ABの場合の問題解決の展開

その際、推定直線が原点を通ると予想される事象で一つの観測データで推定直線が求められると判断される場合であっても、異なる二つの観測データを得るようにした方がよい。理想的には原点を通ると考えられることであっても、実世界においてはその通りになっていないことはよくあるからである。

例えば、前述の研究授業1「プロジェクト問題」で、投影距離  $x$  cmと投影映像の横  $y$  cmには比例関係がありその推定直線は原点を通ると予想されていたが、得られた推定直線は  $y=0.147x+2.142$  であり、 $x=0$  において  $y=2.142$  となった。プロジェクトとスクリーンが離れていない  $0$  cmでの配置のとき、横の長さが  $2.142$  cmとは何を意味するのか？レンズ自体の横幅ではないかや、光源の位置がプロジェクトの内部にある等、より精緻にその事象について深く理解することができる式が得られた。このような事前の想定とは異なる結果と遭遇しながらその理解を図っていく活動は、実際に中学生が実世界の問題を扱っていく際に大変重要な意義がある。ぜひとも、原点を通るという先入観も排除した形で問題解決を展開するのがよい。

## 2. タイプBの場合

タイプBの場合、対象とする事象にどのような数学的な構造があるかが不明であることがその特徴である。不明であるからこそ、実験・観察を通してその事象のふるまいを詳しく知る努力が必要である。その意

味で、できるだけ多くのデータ収集が基本であり、散らばりのあるデータをじっと見つめ、中学生が「一次関数とみなせそうだ」と確認、合意した後、生徒たちにとって自然な発想で推定直線を求め、問題解決を行っていくという展開がよいと思われる。「一次関数とみなせる」と合意し、散らばりのあるデータからどのようにしてその推定直線を求めていくかについては、その授業に参加している生徒や教師の考えや話し合い、そしてその事象の構造や実験・観察で得られたデータの特徴によって変わるものであり選択すべきである。

ただしこのときも、伴って変わる二つの数量に比例関係があるとみなせる場合であっても、原点を必ず通ると決めつけることなく、推定直線を求めるのがよい。 $x=0$  のところは極めて特殊な条件のところであり、考察している事象について深く理解するために有意義な議論を生み出す可能性がある箇所である。当初の問題解決をして終わりとするのではなく、問題解決を通して、その事象のことを深く考えていくべきであると、授業後の協議でも確認されたことである。

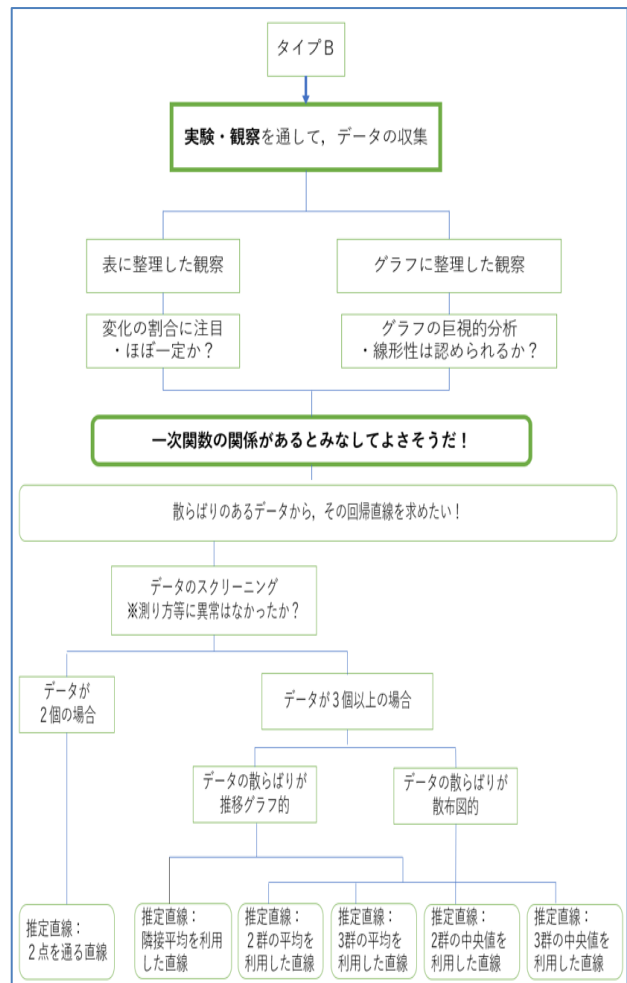


図6：タイプBの場合の問題解決の展開



### 3. 一次関数とみなす問題解決の展開について

図5, 6より, 問題解決の対象とする教材のタイプによってその展開を変えるべきと述べた。その違いは, 「一次関数の関係があるとみなす共有」と「実験・観察」の順番の違いにある。

予め「一次関数とみなすことができる」と確認されるものであれば, 数学的にはデータは2個あればその推定直線を決定することができ, その2個のデータの抽出に注力しできる限り真の値に近いデータを正確に得た方がよい。数学のよさを考慮した場合, 必ずしもたくさんのデータを得ることは効率的ではない。これらのことをはっきりと意識しながら取り組むためにも, タイプA, ABの場合は, 実験・観察をする前にその事象の構造についての数学的な分析が極めて重要であり, そこにしっかりと時間をかけるべきである。

研究授業1の「プロジェクタ問題」であれば, 図7を示して, 図形の学習(拡大・縮小, 相似)の考えを利用して, 投影距離 $x$ が $k$ 倍のとき, 投影映像の横の長さ $y$ も $k$ 倍になることを確認して,  $x$ と $y$ が比例関係にあることを確認, 理解した上で, 最小限の実験・観察に取り組むことが重要であったと考えられる。

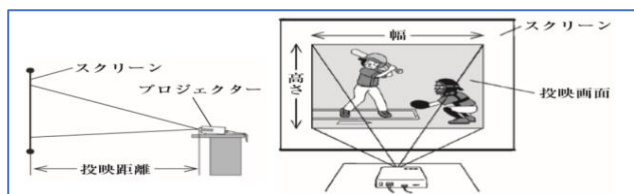


図7: 構造分析のための図(国立教育政策研究所, 2015)

タイプBの場合は, 考察の対象としている事象の構造が事前には不明なので, 局所的, 大所的な分析ができるようにできるだけたくさんのデータを取り, 教師も含めてその問題解決に参加している全員でその事象に潜む数学的な構造を検討判断し, 問題解決に利用できる推定直線を求めることが重要である。

その際, タイプの違いにかかわらず複数データから推定直線を求める活動において, これまでの多くの授業実践では, 推定直線を求めるのに測り方の特徴やグラフの特徴などからこの2点を通る直線が最も全体の真ん中を横切っていると思えるからという理由で, 2点を選びその直線を求めていた。この2点の選び方は, 言うなれば適当で, 主観的な選びである。客観的な再現を得ない方法である。今後実際に生徒たちがどの方法を選択するかは自由として, 数学科の授業として,

時間・空間・人を越えて客観的な再現性を有する方法による学習経験が重要である。その意味で, グラフに表した特徴から, 平均値や中央値の考えを利用したり, 2群, 3群に分けたりして問題解決していくことが, 中学生にとって自然な取り組みと考えられる。

### 4. 提案した展開のよさについて

今回提案した展開のよさとして, 問題解決に向けた思考の流れが自然であることが挙げられる。今回実践したタイプAの授業では, 集めたデータから「なぜ比例していると考えたの?」「本当にそうなのかな?」という教師の発問に対して, 生徒はデータの誤差に着目して(思考が引きずられて)しまい, 本来見いだすべき構造から成り立つ比例の関係を根拠にすることが難しかった。二数量の関係を数学的な構造から判断するのではなく, 実験・観察と, 事例の特徴から関数関係を見いだそうとしたために, 思考の労力が加わり, 筋道だった解決に結びつきにくかった。本稿で提案する展開では, 事象の特徴から一次関数としてみなすことができるか先に検討することで, 解決の見通しを立てて問題解決に向かうことができ, 生徒たちにとっても自然な流れで学習できると考える。

これは, タイプBにおいても同様で, 事例の特徴から一次関数とみなすことが不明である場合についても, 不明であるからこそ, そこからどのようにデータを取り, 分析して見通しをもった学習に引き込むことができ, 生徒たちにとって自然な流れになると考えられる。そしてどちらの場合にも, 実生活の事象におけるデータの客観的な扱い方について実践を通して深く理解することができ, 数学を活用してよりよく問題解決する手順を身に付けることができると考える。

## IV. まとめ

実世界の問題に対して一次関数とみなして問題解決する実践はこれまでも数多く取り組まれてきた。そしてその問題解決の展開としては, 対象とする事象の特徴を問うことなく, 実験・観察を通してそのデータの特徴から一次関数とみなすことができると判断し, 適当な2点を抽出し, その関数関係を表す関係式を導出し, その問題解決を図るというものであった。このような展開では, 一次関数として表されるのであれば二つのデータの抽出で解決可能であるにもかかわらず, たくさんのデータ抽出に努力していたり, いつで

もどこでも誰でも客観的な考察することが可能な数学的な検討をしているにもかかわらず、どちらかと言えば主観的で適当な処理をしていたりして、数学のよさが生かされないまま問題解決している実態が多かった。

対象としている事象の特徴として、事前に一次関数の関係を見いだすことができたり、事前に一次関数の関係を想定したりするか、それともその事象に潜む構造が事前には不明であったりするかで、教材の特徴を分類し、一次関数の関係があるとみなしてから（最小限の）実験・観察をして問題解決するか、それとも実験・観察をしてから一次関数の関係があるとみなして問題解決するか、その展開を別にすることで数学のよさが感得できる授業実践になることを提案した。

加えて、一次関数とみなして問題解決することを共有した後、中学生を対象とした推定直線の求め方としては、データが二つのときは当然それらを利用して推定直線を求めるが、データが三つ以上のときは、平均の考えを利用してグラフの増減を小さくしていくか、それともデータの活用の学習を利用して、データが多ければ三つの群に、少なければ二つの群に分け、極端な値や異常な値のデータがいくつかあると判断されるときはメジアンの考えを利用して、そうでなければ平均値の考えを利用して、推定直線を求めるデータ点を抽出して問題解決することを、生徒たちとともに考え判断していくことを提案した。

数学のよさを生かす形で一次関数とみなして実世界の問題場面を解決していく展開を具体的に整理できたことは、本稿の一つの成果である。

課題としては、中学生にとって自然な推定直線の求め方をいくつか提案しているが、もしかしたら他にも中学生で取り組むことができたり、対象とする事象によって出現するデータに依存してもっと他によりやり方が見つかったりして、中学生にとって処理可能な推定直線の求め方がまだまだあるかもしれない。「みなす」という数学的活動による問題解決の実践を、今後も注目していく必要があると考える。

## 引用・参考文献

- 藤原大樹 (2010), 一次関数とみなすことの指導についての事例的研究, 日本科学教育学会年会論文集, 34, pp.137-140.
- 啓林館 (2021), 未来へひろがる数学 1, 啓林館
- 国立教育政策研究所 (2015), 『平成 27 年度 授業アイディア例 中学校数学』,  
<https://www.nier.go.jp/jugyourei/h27/idea-04.html>  
(2022 年 3 月 6 日取得)
- 国立教育政策研究所 (2021): 全国学力・学習状況調査, 令和 3 年度調査・これまでの調査,  
<https://www.nier.go.jp/kaihatsu/zenkokugakuryoku.html>  
(2022 年 3 月 6 日取得)
- 文部科学省 (2018), 中学校学習指導要領 (平成 29 年告示) 解説 数学編, 日本文教出版
- 永田潤一郎 (2004), 「比例するとみなす」ことのよさについての考察, 日本数学教育学会誌, 第 86 巻, 第 3 号, pp.13-20.
- 清野辰彦 (2012), 数学の創造と活用を重視した単元に用いる教材の要件や特性, 日本科学教育学会年会論文集, 36 巻, pp.107-108.
- 清野辰彦 (2015), 「仮定の意識化」を重視した数学的モデル化の学習指導—「比例とみなす」見方に焦点をあてて—, 日本数学教育学会誌, 数学教育学論究 (臨時増刊), pp.105-112.
- 清水宏幸 (2008), 変化の割合を一定とみなすことを意識させる一次関数の利用の指導—太陽光発電は損か得か—, 日本数学教育学会誌, 90 巻, p.270.
- 東京学芸大学附属国際中等教育学校数学教育研究会 (2015): 『TGUISS 数学 2』, 正進社.
- 吉村直道・吉本浩司・宇都宮憲二・富永剛志・山本泰久 (2020), 「深い学び」を目指した授業改善のための岡山大学附属中数学科との共同研究, 愛媛大学教育学部・学部附属研究助成報告書