大西佐兵衛『雑題』の現代解について
～第 8 巻 第 1 問から第 4 問～

Modern solutions for problems in "Zatsudai" by Sahei Onishi

宮崎智也 *1, 吉岡倖佑 *1, 原本博史 *1, ◯安部利之 *1
MIYAZAKI Tomoya*1, YOSHIOKA Kosuke*1, HARAMOTO Hiroshi*1, ABE Toshiyuki*1
*1 愛媛大学教育学部
*1Faculty of Education, Ehime University

[要約]：愛媛県の和算家大西佐兵衛の編集した『雑題』全 30 巻のうち, 本年度取り組んだ第 8 巻の問題の現代解を紹介する.

[キーワード]：和算 (Wasan, Japanese Mathematics), 三平方の定理 (Pythagoras' Theorem), 二次方程式 (Quadoratic Equations), 複素数平面 (Complex Plane), 課題研究 (Themed Research)

1 はじめに

本稿では, 現在取り組んでいる大西佐兵衛の編集した『雑題』 の現代解について紹介する. 大西佐兵衛は愛媛県を代表する和算家の一人であり, 伊佐爾波神社には氏の奉納した算額 (自作の問題を板版に記載し, 解けたことを感謝し絵馬のように神社に奉納したもの）が残っている. 雑題では, 基本的な問題から難解な問題まで多く扱っており, 各巻には 10 題程度の問題が挙げられている. 今回参考にしたものは雑題 (全 30 巻) の第 1 巻から第 10 巻までを翻訳した資料 (浅山 :2019) である. この資料では, 雑題の答えと術文（答えを与える最終的な数式を文章で説明したもの) の写し, および現代語訳が記載されているが, 術文がどのように得られているのかの解説 (解義) の記載がないため, 問題の解決および術文の検証については読者が考察する必要がある. 愛媛和算研究会では, 数年前より資料 (浅山:019) を通して, 雑題で扱われている問題の研究を行っている. 本論文では, 愛媛和算研究会の定例会 (2023 年 2 月 19 日開催) で発表した愛媛大学教育学部の 3 回生の考えた現代解を交えて紹介する.

和算の問題の解決には, 三平方の定理や余弦定理などの高校数学までに扱う基本的な公式を用いる場合も多いが, その問題解決およびその思考過程においては, 基本的な公式を用いるのみではなく, よりよい解を見つけるための試行錯誤や問題分析, 見つけた解答の改善, 別解の探索, そして術文 (和算解) との照合など, 一つの問題から, 多種多様な知識と技能の定着, そして考察, よりよい解説や表現方法の検討を実践できる. 難易度の設定が難しく, 和算では基本的と思われている公式も, それほど容易に理解できるものとは限らないため, 取り組む人 (生徒) によって問題に対する印象は変わるが, 和算の解法では, 一つの解き方ではなく, 既に解かれた問題についても, 様々な観点からのアプローチが実行できるという点で教材として優れている. 本論文で, その一例が紹介できれば幸いである.

愛媛和算研究会の定例会において, 発表の機会を与えて頂き, また取り組んだ学生達にもあたたかなコメントをくださいました谷本賢治先生にこの場を借りてお礼申し上げます.

2 現代解の解説

以下では, 浅山による『雑題』を現代語に翻訳した資料 (浅山:2019) を参考にしている. その資料にある第 8 巻の第 1 問～第 4 問の問題, 答え, 術文を紹介し, その現代解の例を述べる.

2.1 第 8 巻第 1 問

問題 3. (問題 8-1)

(問題文) 今, 図 1 のように, 外円[1]内に 5 つの円を容れる (互いに接するように配置する). 外円の直径が 20 寸, 甲円の直径が 5 寸のとき, 丙円の直径はいくらか.

(答え) 丙円の直径は 20 寸.

(術文)

$$丙 = \frac{(外 - 甲)\,外}{外 + 甲}.$$

[1]原文では大円と記載があるが, 外円と思われる.

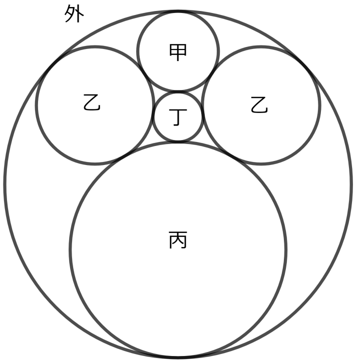

図 1. 問題 8-1

ただし, 以下, 円の名称を用いてその円やその円の直径を表す. 例えば外円の直径を外と表す.

この問題は精要算法 (藤田, 1871) の下巻に掲載されている問題である.

(解法). 図 1 の外円, 甲円, 乙円, 丙円, 丁円の中心を O, O_1, O_2, O_3, O_4 とし, 半径をそれぞれ $R, r_1 r_2, r_3, r_4$ とする. これらの中心と中心を結んだ辺の抜き出すと, 次のようになる.

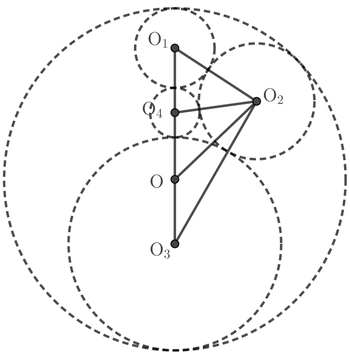

図 2. 問題 8-1 の円の中心の配置

まず, 外円の直径は甲円, 丁円, 丙円の直径の和なので,

$$R = r_1 + r_4 + r_3 \tag{3.1}$$

が得られる. $\triangle O_1O_2O_3$ と点 O_4 対し, スチュワートの定理 (補助定理 20, 愛媛算額:2017) を適用すると,

$$\begin{aligned}&(r_2+r_3)^2(r_1+r_4)+(r_1+r_2)^2(r_3+r_4)\\&=(r_1+r_3+2r_4)((r_2+r_4)^2+(r_1+r_4)(r_3+r_4))\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる. これに (3.1) を代入して r_4 を消去すると,

$$\begin{aligned}&(r_2+r_3)^2(R-r_3)+(r_1+r_2)^2(R-r_1)\\&=(2R-r_1-r_3)(R-r_1+r_2-r_3)^2\\&\quad+(2R-r_1-r_3)(R-r_3)(R-r_1)\end{aligned} \tag{3.2}$$

が得られる. 次に $\triangle O_1O_2O_3$ と点 O 対し, スチュワートの定理を適用すると,

$$\begin{aligned}&(r_2+r_3)^2(R-r_1)+(r_1+r_2)^2(R-r_3)\\&=(2R-r_1-r_3)(R-r_2)^2\\&\quad+(2R-r_1-r_3)(R-r_1)(R-r_3)\end{aligned} \tag{3.3}$$

が得られる.

ここで, $2R$ は外円の直径なので, $2R > r_1+r_3$ であることに注意する. (3.2) と (3.3) を辺々足すと, R, r_1, r_3 の多項式として両辺とも $2R-r_1-r_3$ を因子として持つ. よって, $2R-r_1-r_3 \neq 0$ より, これで割ると,

$$(r_1+r_3)r_2 = (R-r_1)(R-r_3) \tag{3.4}$$

が得られる. 一方 (3.3) を展開すると, 次の r_2 の一次方程式が得られる.

$$(R^2 - r_1r_3)r_2 = R(R-r_1)(R-r_3). \tag{3.5}$$

従って, (3.4)–(3.5) の r_2 を消去して,

$$R(r_1+r_3) = R^2 - r_1r_3$$

が得られる. これを r_3 について解くと,

$$r_3 = \frac{R(R-r_1)}{R+r_1}$$

従って

$$丙 = 2r_3 = \frac{2R(2R-2r_1)}{2R+2r_1} = \frac{外\,(外-甲)}{外+甲}$$

となり, 術文を得る.

この式に 外 $= 20$(寸), 甲 $= 5$(寸) を代入すると, 丙 $= \frac{15\cdot 20}{25} = 12$(寸) が得られる. □

補足 3.1. 問題 8-1 は, 円に関する反転を用いる方法もある. 円に関する反転は, 和算解では余り用いられないが, 現代解では非常に強力なツールとなっている. また, 本内容を発表した愛媛和算研究会の定例会では, 谷本氏により, 平田の考案した算変座標 (平田:2022) を用いる方法も紹介された.

3.1　第 8 巻第 2 問

問題 4. (問題 8-2)

(問題文) 今, 図のように, 直線上に 4 つの円を互いに接するように配置する. 甲円の直径が 100 寸, 丙円の直径が 64 寸, 丁円の直径が 48 寸のとき, 乙円の直径を求めよ.

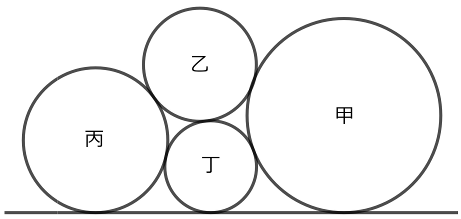

図 3. 問題 8-2 の配置

(答え) 乙円の直径は 72.9 寸.

(術文)

$$天 = \sqrt{甲丙}, \quad 地 = 4(天 - 丁)$$

とすると,

$$乙 = \frac{\left(\frac{甲+丙}{天} + 2\right)丁^2}{地}$$

この問題も精要算法の下巻に記載がある. ただ雑題では, 精要算法の術文とは少し用語を変更し, より理解しやすくしている. ここでは, 算法助術にある公式を用いた解法を紹介する.

(解法). 算法助術の次の公式を用いる.

定理 4.1. (算法助術公式 47) 図 4 のように, 円 O_1, O_2, O_3 は互いに外接し, 円 O_1 と円 O_2 は直線に接している. 円 O_1, O_2, O_3 の直径を d_1, d_2, d_3 とし, $\mathrm{AB} = h$ とおけば,

$$d_1h + d_2h - d_1d_2 - 2\sqrt{d_1d_2d_3h} = 0.$$

図 3 の甲円, 乙円, 丙円, 丁円の直径をそれぞれ d_1, d_2, d_3, d_4 とする. また乙円周上の点 A から直線に下した垂線の足を B とし, A が乙円周上を動くときの AB の最大値を h とする. このとき, 算法助術の公式 47 を甲円, 乙円, 丁円に適用すると,

$$d_1h + d_4h - d_1d_4 - 2\sqrt{d_1d_2d_4h} = 0. \qquad (4.1)$$

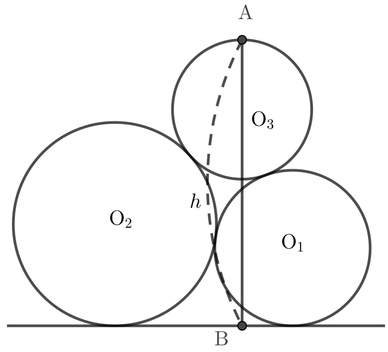

図 4. 算法助術 47

同様に, 丙円, 乙円, 丁円に適用すると,

$$d_3h + d_4h - d_3d_4 - 2\sqrt{d_2d_3d_4h} = 0.$$

以上より,

$$\begin{aligned}&(\sqrt{d_3}(d_1 + d_4) - \sqrt{d_1}(d_3 + d_4))h \\ &= d_1\sqrt{d_3}d_4 - \sqrt{d_1}d_3d_4\end{aligned}$$

が得られ,

$$(\sqrt{d_1d_3} - d_4)(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3})h = \sqrt{d_1d_3}d_4(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3}).$$

$d_1 \neq d_3$ の場合,

$$h = \frac{\sqrt{d_1d_3}d_4}{\sqrt{d_1d_3} - d_4}$$

が得られる. これを (4.1) 式に代入し, d_2 について解くことで,

$$d_2 = \frac{\left(\frac{d_1+d_3}{\sqrt{d_1d_3}} + 2\right)d_4^2}{4(\sqrt{d_1d_3} - d_4)}$$

が成り立つことがわかり, これは術文の式と一致している. □

4.1　第 8 巻第 3 問

次の問題も精要算法の下巻にある問題である.

問題 5. (問題 8-3)

(問題文) 今, 図 5 のように, 三角形の内部に甲, 乙, 丙の三つの正方形を容れる. 大斜が 17855 寸, 中斜が 14641.1 寸, 小斜が 7499.1 寸のとき, 甲正方形の一辺の長さを求めよ. またその解法も問う.

(答え) 甲正方形の一辺は 3738 寸.

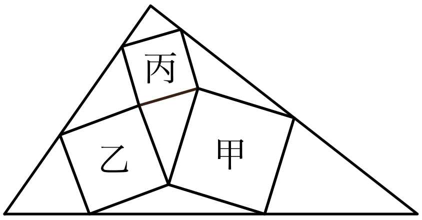

図 5. 問題 8-3

(術文)

$$\text{天} = \text{大斜}^2 + \text{中斜}^2,$$
$$\text{地} = \frac{\sqrt{4\,\text{大斜}^2\text{中斜}^2 - (\text{天} - \text{小斜}^2)^2}}{2}$$

とし[2],

$$\text{法} = 3\,\text{地} + \text{天} + \text{小斜}^2$$

とすると,

$$\text{甲方面} = \frac{\sqrt{2\,\text{天} - \text{小斜}^2}\text{地}}{\text{法}}$$

となる. ここで, 甲方面とは, 甲正方形の一辺の長さである.

(解法). ここでは複素数平面を利用した解法を紹介する. 雑題の和算解とは全く異なるはずだが, 正方形の各頂点を複素数の四則演算を用いて表すことができて, 更に連立 1 次方程式を使って術文を導くことができるためとても便利である. さらに, 計算の見通しを良くするために問題の図 5 を左右反転させて, 図 6 のように甲に最も近い三角形の頂点を 0 とし, 甲が左側, 乙が右側にある図で考えることとする.

虚数単位を i で表す. 正の実数 a, b, c に対して, 0, a に対応する複素数平面上の点をそれぞれ O, A とし, 点 B を OB $= b$, AB $= c$ となる第 1 象限の点とする. このとき双股弦の術 (現在の余弦定理) から点 B に対応する複素数 $m + in$ $(m, n \in \mathbb{R})$ は

$$m = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a},$$
$$n = \sqrt{b^2 - m^2} = \frac{1}{2a}\sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

となる.

図 6 のように, 複素数平面上の点 P から X をとる. ただし, 点 P, R は実軸上の点とし, 点 Q は線分 OB 上の点であるとする. 特に点 P, Q, R に対応する複素数はそれぞれ p, $q + i\frac{n}{m}q$, r $(p, q, r \in \mathbb{R})$ と表すことができる.

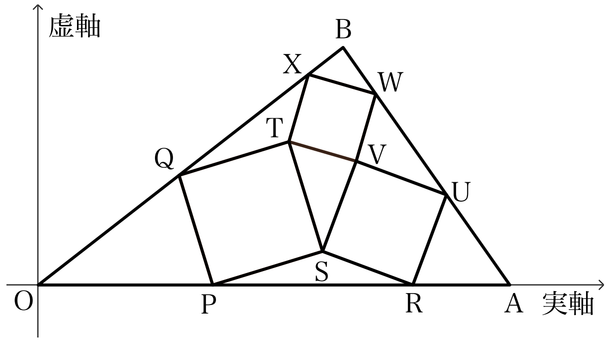

図 6. 複素数平面における配置

以降, 点 S, T, U, V, W, X に対応する複素数を, それぞれ s, t, u v, w, x で表す. 点 S は, 点 P を中心に Q を $-\frac{\pi}{2}$ 回転した点であるから,

$$\begin{aligned} s &= \left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)\left(q + i\frac{m}{n}q - p\right) + p \\ &= -i\left(q + i\frac{m}{n}q - p\right) + p \end{aligned}$$

である. また, 点 T は, 点 P を中心に Q を $-\frac{\pi}{4}$ 回転して $\sqrt{2}$ 倍した点であるから

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(q + i\frac{m}{n}q - p\right) + p \\ &= (1 - i)\left(q + i\frac{m}{n}q - p\right) + p \end{aligned}$$

である.

同様にして, 点 U, V, W, X はそれぞれ

$$\begin{aligned} u &= -i(s - r) + r \\ v &= (1 - i)(s - r) + r \\ w &= -i(t - v) + v \\ x &= (1 - i)(t - v) + v \end{aligned}$$

と表すことができる. ここで点 U, W が線分 AB 上の点であることと, 点 X が線分 OB 上の点であることから

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(u) &= -\frac{n}{a - m}(\mathrm{Re}(u) - m) + n, \\ \mathrm{Im}(w) &= -\frac{n}{a - m}(\mathrm{Re}(w) - m) + n, \\ \mathrm{Im}(x) &= \frac{n}{m}\mathrm{Re}(x) \end{aligned}$$

[2](浅山:2019) における術文の現代語訳では, 地の式の右辺において, 小斜^2 が 小斜 となっているが, これは誤記であると思われる. ここでは修正したものを記述している.

が成り立つ．これらの式を具体的に書き下すと

$$\begin{aligned}&(2am-2m^2+3mn)p\\&\quad+(-3am-an+3m^2+3n^2)q\\&\quad+(am-m^2-mn)r=amn,\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}&(-am+m^2+mn)p-anq\\&\quad+(am-m^2+mn)r=amn,\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$(3m^2-mn)p+(-3m^2-3n^2)q+mnr=0.\tag{5.3}$$

これを p, q, r を未知数とする連立 1 次方程式と考えて解くと[3]

$$\begin{aligned}p&=\frac{a^2m+am^2+an^2}{2a^2-2am+3an+2m^2+2n^2},\\q&=\frac{a^2m+am^2}{2a^2-2am+3an+2m^2+2n^2},\\r&=\frac{a^2m+3a^2n+am^2+an^2}{2a^2-2am+3an+2m^2+2n^2}\end{aligned}$$

となる．このとき線分 PQ の長さは

$$\begin{aligned}&\sqrt{(p-q)^2+\left(\frac{n}{m}q\right)^2}\\&\quad=\frac{an\sqrt{a^2+2am+m^2+n^2}}{2a^2-2am+3an+2m^2+2n^2}\\&\quad=\frac{an\sqrt{a^2+(a^2+b^2-c^2)+b^2}}{2a^2-(a^2+b^2-c^2)+3an+2b^2}\\&\quad=\frac{\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}an}{3an+a^2+b^2+c^2}\end{aligned}$$

であるが，これは a を大斜，b を中斜，c を小斜とし，

$$\begin{aligned}天&=a^2+b^2\\地&=an=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}\\法&=3an+a^2+b^2+c^2\end{aligned}$$

とおくと甲方面を求めるための術文と一致する．

この問題では $a=17855$, $b=14641.1$, $c=7499.1$ の場合だから，上記の式を用いて甲方面を求めると 3738 となり，雑題の解答に示されている値と一致する． □

5.1 第 8 巻第 4 問

問題 6. (問題 8-4)

(問題文) 今，図 7 のように，円弧内に等円と小円を容れる．等円の直径と弦の長さを用いて，分数の形[4]で小円の直径を表せ．

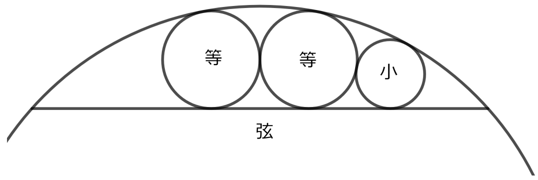

図 7. 問題 8-3

(答え) 術文の通り．

(術文)

$$法=(3\,等^2+弦^2)^2,\quad 実=(弦^2-等^2)^2等$$

とすると，

$$小=\frac{実}{法}.$$

(解法). この問題は，図 8 のように幾つかの補助線を引くことで得られる直角三角形において三平方の定理を用いることで証明できる．ただし，全円の半径を R,

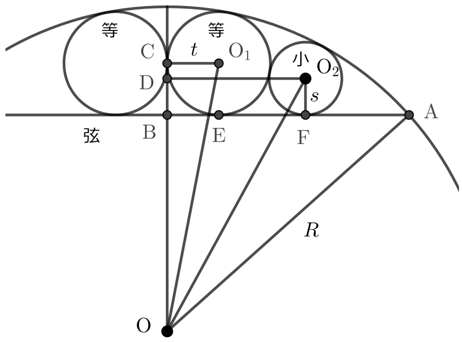

図 8. 解法の配置

弦長を $2b$, 等円の半径を t, 小円の半径を s とおく．

$\triangle OO_1C$, $\triangle OO_2D$, $\triangle OAB$ に三平方の定理を適用すると，それぞれ

$$(R-t)^2=(R-a+t)^2+t^2,\tag{6.1}$$

$$(R-s)^2=(R-a+s)^2+(t+2\sqrt{ts})^2,\tag{6.2}$$

$$R^2=(R-a)^2+b^2\tag{6.3}$$

を得る．(6.1) と (6.3) を辺々引くと，

$$-2tR+t^2=2t(R-a)+2t^2-b^2.$$

---

[3]以降は単なる文字式の計算であるが非常に煩雑であるため，GeoGebra の CAS (Computer Algebra System) を利用している．

[4]原文には歸除とあり，これは帰除のことで，桁数にこだわらず割り算を行うことを意味している．

これより,

$$a=\frac{t^2+4tR-b^2}{2t}. \tag{6.4}$$

これを (6.3) に代入して,

$$R=\frac{(t^2+b^2)^2}{4t(b^2-t^2)}. \tag{6.5}$$

そして, (6.4) より,

$$a=\frac{2b^2t}{b^2-t^2} \tag{6.6}$$

が得られる. (6.5)–(6.6) を (6.2) に代入すると, $\sqrt{s}$ の二次方程式

$$(b^2+3t^2)\sqrt{s}^2+4t^2\sqrt{t}\sqrt{s}+t(t^2-b^2)=0 \tag{6.7}$$

が得られ, これを $\sqrt{s}$ について解けば,

$$\sqrt{s}=\frac{\sqrt{t}(b^2-t^2)}{b^2+3t^2},\quad -\sqrt{t} \tag{6.8}$$

が導かれる. しかし, $\sqrt{s}>0$ より,

$$\sqrt{s}=\frac{\sqrt{t}(b^2-t^2)}{b^2+3t^2} \tag{6.9}$$

であるので, 実 $=2(4\sqrt{t}(b^2-t^2))^2=(\text{弦}^2-\text{等}^2)$ 等, 法 $=(4(b^2+3t^2))^2=(\text{弦}^2+3\,\text{等}^2)^2$ とおくことで,

$$\text{小}=2\sqrt{s}^2=\frac{\text{実}}{\text{法}}$$

となることがわかる. □

7 終わりに

本論文では, 2023 年 2 月 19 日に開催された第 48 回愛媛和算研究会の定例会において発表した解法及びそこでは発表できなかった解法をまとめている. 今回紹介した問題は, 雑題の第 8 巻の第 1 問から第 4 問の 4 問であり, 定例会では, 著者のうち宮崎, 吉岡が, 第 2 問と第 4 問の解法をそれぞれ発表した. これらの問題は, 非常に有名な和算書『精要算法』 (藤田:1781) からの引用であり, 大西佐兵衛が精要算法をはじめとする多種の和算書にも精通していることを物語っている. 実際, 雑題は第 8 巻以外にも精要算法からの引用が数多く載せられている. 言い換えれば, これらの問題の解法については, 精要算法の解説書においてすでに解説されてあり, 本論文に掲載した解法は細かい点は異なるが, 大筋ではその解答例の一つに過ぎない (ただし, 第 3 問の解法は新規の物である). 本論文に掲載している解法は, 学生自身が, 問題の解法について未知の状態から考察したものである. 学生が考えた手法であるため, その解法も三平方の定理や余弦定理を用いるなど, 基本的な手法のみで実行しており, より高等学校の生徒にも理解しやすい解法となっている. 実際, 第 1 問, 第 2 問, 第 4 問については数学 A の知識で解法を導くことができる. 一方で, 第 3 問は難問であり, 和算解では複雑な補助線と多くの計算を必要とするが, ここで挙げた解法では, 複素数平面と複素数の幾何的性質を用いた解法であり, この解法は著者の知る中では新しい解法である. 問題をそのまま高等学校の教材に使用することは難しいが, 複素数の基本的な幾何的性質を適切に用いている点で, 数学 C に関する課題研究の題材として利用可能であると考えている.

今回紹介した 4 問は和算全体に比べれば本当に一握りの問題でしかないが, 現代解の考察を通して, 和算家の驚くべき計算力を実感するとともに得もすれば技巧的になりすぎる和算解を, 現代の数学の観点から明瞭な形で見直すことも和算の問題に取り組む大きな動機である. 和算の研究を通して, 数と式, そして図形の問題, 場合によっては関数や変換について総合的に扱うことが可能であるので, 教材の発掘として更なる研究を進めて行きたい.

参考文献

浅山秀博 (2019) : 『雑題』三十巻 (大西佐兵衛著) を読むにあたって (その 1), 愛媛和算研究会.
愛媛算額 (2017) : 愛媛の算額研究〜現代解法を通して〜, 平田浩一, 谷本賢治 編, 愛媛和算研究会.
平田浩一 (2022) : 算変法不等式が作る座標系について, 松山大学論集 **34-1**, 57–103, 松山大学総合研究所.
藤田定資 (1781) : 精要算法, 京都大学貴重資料デジタルアーカイブ.