大西佐兵衛『雑題』の現代解について
～第 8 巻 8-5, 8-6, 8-7, 8-8, 8-9～
Modern solutions for problems in “Zatsudai” by Sahei Onishi

原本博史 *1, ◯安部利之 *2
HARAMOTO Hiroshi*1, ABE Toshiyuki*2
*1 愛媛大学データサイエンスセンター
*2 愛媛大学教育学部
*1Center for Data Science, Ehime University
*2Faculty of Education, Ehime University

[要約]：愛媛県の和算家大西佐兵衛の編集した『雑題』全 30 巻から, 第 8 巻の後半について解説する.

[キーワード]：和算 (Wasan, Japanese Mathematics), 2 次方程式 (Quadoratic Equations), 指数関数と対数関数 (Exponential functions and logarithmic functions), 相似 (Similarity), 楕円 (Elliptic curves), 複素数平面 (Complex plane), 球 (Spheres), 課題研究 (Themed Research)

1　はじめに

これまで, 大西佐兵衛の編集した『雑題』の問題のうち第 8 巻の前半部分について (宮崎他, 2023) において解説したが, 本論文では第 8 巻の後半の問題について解説する. 大西佐兵衛及び雑題については, (宮崎他, 2023) を参照いただきたい. また, 引き続き, 浅山氏によりまとめられた資料 (浅山, 2019) を用いた.

今回扱う問題について簡単に解説する. 第 5 問は, 数列に関する問題であるが, 演繹的に導く方法が不明であったため, 具体的な数値を用いて議論した. 第 6 問は, 和算で良く知られた公式を用いる問題である. 第 7 問は, 複数の球が互いに接する問題である. 容易に円の問題に帰着でき, 高校までの知識で考察可能であるが, 場合分けやその考察過程が非常に複雑な問題であったため, 多くの紙面を割くこととなった. 第 8 問は, 初等幾何的にも解くことができるが, ここでは複素数を用いて解法を与えた. 第 9 問は楕円の問題であるが, 1 つの軸に関する引きのばしを考えることで, 円の問題に帰着することで解くことができる. ここでは, 小寺先生のまとめた天生法百景の問題を援用した.

本論文で扱った問題については, 現代解の発表していないが, 和算解については, 愛媛和算研究会定例会において, 谷本賢治先生が講演された. 第 7 問については, 第 54 回愛媛和算研究会において, 本研究をもとに発表した. 今回も, 取りまとめの安部が解法を精査している. 分かりにくい部分も多々あると思われるが, ご容赦頂きたい.

本稿は, 惜しくも 2025 年 7 月にご逝去された, 小寺裕先生に捧げます. ご冥福をお祈り申し上げます.

2　現代解の解説 (第 8 巻)

この節では, 資料 (浅山, 2019) に挙げられた問題, 答え, 術文を紹介し, その現代解及び注意点, 補足について述べる. 誤植等については, 修正したものを挙げ, 補足に修正箇所を指摘した.

以下円径は全て円の直径を表すものとする. また計算ソフトとしては Maxima を用い, 描画ソフトとしては GeoGebra を用いた.

2.1　第 8 巻第 5 問

問題 1. (問題 8-5)

(問題文) 今, 長方形が数知れずある. その面積が 92.224 寸^2, 長辺の和 33.616 寸, 短辺の和 12.203125 寸. 只云う, 長辺は $\frac{1}{5}$ ずつ小さくなり, 又云う, 短辺は $\frac{1}{4}$ ずつ小さくなるとき, 各長方形の大きさはいくらか.

(答え) 第 1：長 10 寸, 短 4 寸.

第 2：長 8 寸, 短 3 寸.

第 3：長 6.4 寸, 短 2.25 寸.

第 4：長 5.12 寸, 短 1.6875 寸.

第 5：長 4.096 寸, 短 1.265625 寸.

(術文) 無し

(解法). 1 つ目の長方形の長辺の長さを x, 短辺の長さを y とする．また長方形の縮小率を長辺 r, 短辺 s $(0 < r < s < 1)$ とし, 長辺の総和を A, 短辺の総和を B, 面積の総和を S とおく．

今, k 個の長方形が題意をみたすとすると,

$$x(1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1}) = A,$$
$$y(1 + s + s^2 + \cdots + s^{k-1}) = B,$$
$$xy(1 + (rs) + (rs)^2 + \cdots + (rs)^{k-1}) = S$$

が成り立ち,

$$(1 - r^k)x = (1 - r)A =: \alpha, \tag{2.1}$$
$$(1 - s^k)y = (1 - s)B =: \beta, \tag{2.2}$$
$$(1 - (rs)^k)xy = (1 - rs)S =: \gamma \tag{2.3}$$

と表される．(2.1)–(2.3) より, $r^k x = x - \alpha$, $s^k y = y - \beta$, $(rs)^k xy = xy - \sigma$ となるので, $(x - \alpha)(y - \beta) = xy - \sigma$ が得られ, これを整理した, $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1 + \frac{\sigma}{\alpha\beta}$ に, (2.1), (2.2) を代入して,

$$\frac{1}{1 - r^k} + \frac{1}{1 - s^k} = 1 + \frac{\sigma}{\alpha\beta}$$

が得られる．ここで, $r > s$ より,

$$\frac{1}{1 - s^k} < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sigma}{\alpha\beta}\right) < \frac{1}{1 - r^k}$$

となり, 逆数をとり整理すると,

$$s^k < \frac{\sigma - \alpha\beta}{\sigma + \alpha\beta} < r^k \tag{2.4}$$

が成り立つことがわかる．

ここからは具体的な数値を用いる．まず $r = \frac{4}{5}$, $s = \frac{3}{4}$ より, $r > s$ である．そして, $A = \frac{33616}{1000}$, $B = \frac{12203125}{10^6}$, $S = \frac{92224}{1000}$．これより, $T := \frac{\sigma - \alpha\beta}{\sigma + \alpha\beta} = \frac{119117}{417459}$ が得られる．そこで, $T - s^k$, $r^k - T$ を計算すると, $k < 5$ であれば, $T - s^k < 0$, $k > 5$ であれば, $r^k - T < 0$ となる．従って, $k = 5$ が解の候補であるが, $k = 5$ のとき,

$$\frac{1}{1 - r^5} + \frac{1}{1 - s^5} = \frac{2}{1 - T} = \frac{417459}{149171}$$

となり, 適することが確認できる．(2.1), (2.2) より, $x = 10$, $y = 4$ が得られ, (答え) が得られる． □

補足 1.1. 原典において, 長辺の和が 32.616 寸とあるが, 答えにある長辺の和は

$$10\frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^5}{1 - \frac{4}{5}} = 33.616$$

であるので, 正確には問題文にある通りである．

2.2 第 8 巻第 6 問

問題 2. (問題 8-6)

(問題文) 今, 図 1 のように, 直角三角形内に逐次に円を容れる．只云う, 勾若干, 又云う, 股若干として, 各円径を得る術を問う．

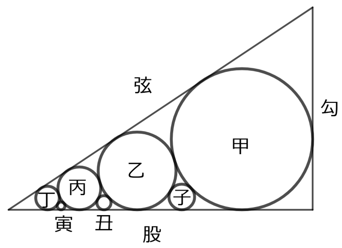

図 1. 問題 8-6 の配置

(答え) 左 (術文) の如し．

(術文) 別に弦は求める．

$$勾 + 股 - 弦 = 甲円径,$$
$$\frac{3\,弦 - (\sqrt{8(弦 - 股)\,弦} + 股)}{股 + 弦} = 周率$$

とする．

$$甲円径 \times 周率 = 乙円径,$$
$$乙円径 \times 周率 = 丙円径.$$

逐次, このようにして各円径を得る．次に, 2((1 − 周率) 股 + 乙円径) = 法, 甲円径 × 乙円径 = 実 とし, $\frac{実}{法}$ = 子円径.

$$子円径 \times 周率 = 丑円径,$$
$$丑円径 \times 周率 = 寅円径.$$

逐次, 同様にして各円径を得る．

(解法). 甲円径と乙円径の比 (周率) を求めれば, 甲円径及び子円径に周率を繰り返し掛けることで, 累円径を求めることができる．

図 2 のように, 勾, 股, 弦をそれぞれ a, b, c とおき, 甲円の中心を O, 半径を R, 乙円の中心を P, 半径を r とする．以下, $a^2 + b^2 = c^2$ は断りなく用いる．

甲円, 乙円と股の接点をそれぞれ M, N とする．よく知られているように,

$$R = \frac{a + b - c}{2} \tag{2.5}$$

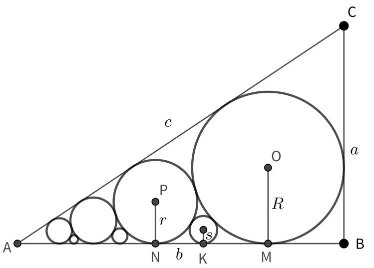

図 2. 問題 8-6 の解法の配置

である．次に △AOM と △APN は相似であり，その相似比

$$x := \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AM}} = \frac{r}{R}$$

が求める周率である．

今，$\mathrm{AM} = b - R$ であり，$\mathrm{MN} = 2\sqrt{Rr}$ なので，$\mathrm{AN} = b - R - 2\sqrt{Rr}$ である．従って，

$$x = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AM}} = \frac{b - R - 2\sqrt{Rr}}{b - R} = 1 - \frac{2R}{b - R}\sqrt{x} \quad (2.6)$$

が得られる．ここで，$\frac{R}{b-R}$ に (2.5) を代入し，$a + b + c$ を分母分子にかけることにより，$\frac{R}{b-R} = \frac{a}{b+c}$ が得られる．従って，$\sqrt{x}$ は 2 次方程式 $\sqrt{x}^2 + \frac{2a}{b+c}\sqrt{x} - 1 = 0$ を満たす．$\sqrt{x}$ は，この方程式の正の解なので，

$$\sqrt{x} = \frac{-a + \sqrt{2c(b+c)}}{b + c}$$

である．従って，両辺を 2 乗して，$a^2 = (c - b)(c + b)$ を代入すれば，

$$x = \frac{3c - b - \sqrt{8c(c - b)}}{b + c}$$

となり，術文の周率を得る．

最後に子円の半径を s，子円と股の接点を K とすれば，$\mathrm{NK} + \mathrm{KM} = \mathrm{NM}$ なので，$2\sqrt{sr} + 2\sqrt{sR} = 2\sqrt{Rr}$ である．両辺を R で割れば，

$$\sqrt{\frac{s}{R}}(\sqrt{x} + 1) = \sqrt{x}.$$

よって，

$$\frac{s}{R} = \frac{x}{(1 + \sqrt{x})^2} \quad (2.7)$$

を得る．ここで，(2.6) より，

$$\sqrt{x} = \frac{(1 - x)(b - R)}{2R}$$

より，

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt{x})^2 &= 1 + x + 2\sqrt{x} \\ &= 1 + x + \frac{(1 - x)(b - R)}{R} \\ &= \frac{2Rx + (1 - x)b}{R}\end{aligned}$$

を得る．以上より，$Rx = r$ に置き換えると，

$$2s = \frac{(2R)(2r)}{2((1 - x)b + 2r)}$$

となり，術文の式が得られる．　□

補足 2.1. 勾股弦から求めるだけであれば難くはないが，弦と股のみを用い，勾を消去する方法に気付くことが少し難しい問題である．直角三角形の辺に関する様々な関係式が現れ，和算の醍醐味を感じさせる問題である．

2.3　第 8 巻第 7 問

問題 3. (問題 8-7)

(問題文)　今，図 3 のように，大球内に 9 球をおく (甲球 4 個は互いに接し，丙球も同じ．甲，丙球は大球に各接し，乙球は接しない)．甲球径 30 寸，乙球径 15 寸，丙球径 12 寸のとき，大球径はいくらか．

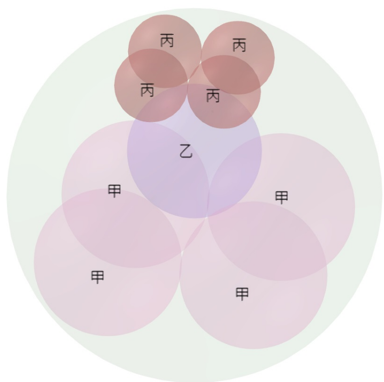

図 3. 問題 8-7 の配置

(答え)　大球径 85 寸．

(術文) 甲球径 + 丙球径 = 天 (以下，球径の 2 字を略す)．

$$2\,天 \times 乙 - (甲^2 + 丙^2) = 地,$$

$$(天 - 乙)\,乙 - 甲 \times 丙 = 人.$$

$$\frac{(\sqrt{2\,地\times 乙^2+人^2}+人)\times 天}{地}+乙=大球径.$$

この術解を導くために, まず次の補題を準備する.

補題 2.1. $a,b\in\mathbb{R}$, $a>b>0$ に対し,

$$f(x)=\sqrt{x^2+2ax-a^2}+\sqrt{x^2+2bx-b^2},$$
$$g(x)=\sqrt{x^2+2bx-b^2}-\sqrt{x^2+2ax-a^2}$$

と定める. また

$$\lambda=\sqrt{2}+1,\quad r_{-1}=-\lambda a,\quad r_1=\lambda^{-1}a$$

とし, $I^-:=(-\infty,r_{-1}]$, $I^+=[r_1,+\infty)$ とする. このとき次が成り立つ.

(1) (i) 関数 $f(x)$ は I^- で単調減少, I^+ で単調増加な連続関数である.

(ii) 関数 $g(x)$ は I^- で単調増加, I^+ で単調減少な連続関数である.

(2) (i) $r\in I^+$ に対し, $f(x)=f(r)$ が異なる 2 つの実数解をもつ必要十分条件は,

$$r\geq r_3,\quad r_3=\frac{\lambda a-b}{\lambda a+b}a$$

である.

(ii) $\lambda b\leq a$ のとき, $r\in I^+$ に対し, $g(x)=f(r)$ が実数解をもつ必要十分条件は,

$$r_2<r\leq r_3,\quad r_2=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$$

であり, その解は I^- にただ 1 つ存在する.

(iii) $\lambda b>a$ のとき, $r\in I^+$ に対し, $g(x)=f(r)$ が実数解をもつ必要十分条件は,

$$r_1\leq r\leq r_3$$

であり, その解は I^- にただ 1 つ存在する.

(3) (2) (i) の $f(x)=f(r)$ の解 $x=r$ 以外の解及び, (2) (ii)–(iii) の $g(x)=f(r)$ の解は, いずれも

$$\begin{aligned}
x&=-r-\frac{(a+b)(f(r)^2+(a-b)^2)}{f(r)^2-(a-b)^2}\\
&=-r\\
&\quad+\frac{(a+b)\left(r^2-(a+b)r+ab-\sqrt{d(r)}\right)}{2(a+b)r-a^2-b^2},\\
d(r)&=(r^2+2ar-a^2)(r^2+2br-b^2)
\end{aligned}\tag{2.8}$$

である.

参考のために, 関数 $y=f(x)$ のグラフ (実線) と $y=g(x)$ のグラフ (波線) を提示する (図 4)

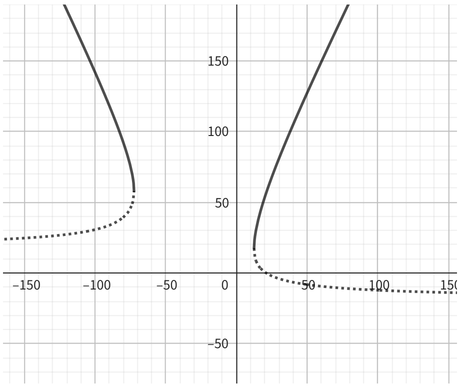

図 4. $a=30, b=12$ のときの関数 $y=f(x)$ のグラフ (実線) と $y=g(x)$ のグラフ (波線)

(証明).

$$A(x)=x^2+2ax-a^2,\quad B(x)=x^2+2bx-b^2$$

とおく. $a>b$ より, 関数 $y=f(x)=\sqrt{A(x)}+\sqrt{B(x)}$ 及び $y=g(x)=\sqrt{B(x)}-\sqrt{A(x)}$ は, $A(x)\geq 0$ の定める範囲, つまり $I^-\cup I^+$ で定義される.

(1) (i)–(ii) は微分し, その符号を確認することで, 証明できる. 詳細は省略するが, $a=30$, $b=12$ の場合は図 4 でも確認できる. また,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\pm\infty}g(x)\\
&=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(b-a)(2x+(a+b))}{\sqrt{x^2+2ax-a^2}+\sqrt{x^2+2bx-b^2}}\\
&=\lim_{t\to\infty}\frac{(b-a)(\pm 2t+(a+b))}{\sqrt{t^2\pm 2at-a^2}+\sqrt{t^2\pm 2bt-b^2}}\\
&=\mp(a-b)
\end{aligned}$$

であるので, $y=a-b$ が $y=g(x)$, $x\in I^-$ の漸近線であり, $y=-(a-b)$ が $y=g(x)$, $x\in I^+$ の漸近線であることがわかる.

(2)

$$f(r_{-1})=g(r_{-1})=\sqrt{B(-\lambda a)}=\sqrt{(a-b)(\lambda^2 a+b)},$$
$$f(r_1)=g(r_1)=\sqrt{B(\lambda^{-1}a)}=\sqrt{(a-b)(\lambda^{-2}a+b)}$$

である. グラフ (図 4) より, $y=k$ は (i) $k\geq f(r_{-1})$ のとき, 曲線 $y=f(x)$ と 2 点で交わり, (ii) $a-b<k\leq f(r_{-1})$ であれば, $y=f(x)$ 及び $y=g(x)$ と 1 点ずつ, または $y=g(x)$ と 2 点で交わる.

この補題の主張においては, $r \in I^+$ に対し, $y=f(x)$ と $y=f(r)$ が少なくとも 1 点で交わる場合を考えている．$y=f(x)$ が $y=f(r_{-1})$ と 2 点で交わる場合, $f(x)=f(r_{-1})$ の $x=r_{-1}$ ともう一つの解を $x=r_3$ とすれば,

$$r_3=\frac{\lambda a-b}{\lambda a+b}a$$

であることを後で確認する．そして, $r \geq r_3$ のとき, $f(x)=f(r)$ の解は $x=r$ 以外に I^- に 1 つ存在する.

$y=k$ が $y=f(x)$, $y=g(x)$ と 1 点ずつで交わる場合は, 少し状況が複雑であり, $f(r_1)$ と $a-b$ の大小関係によって, 状況が変わる.

$$(\lambda^{-2}a+b)-(a-b)=2\lambda^{-1}(\lambda b-a)$$

より, 補題の (2) (ii) の場合, $f(r_1) \leq a-b$ であり, 直線 $y=f(r_1)$ は $y=g(x)$ の漸近線 $y=a-b$ と等しいかまたは下部にあることがわかる．直線 $y=a-b$ は, 後で確認するように, $x=r_2=\frac{a^2+b^2}{2(a+b)}$ のときに, $y=f(x)$ と交わる．このとき,

$$r_2-r_1=\frac{\lambda^{-2}(\lambda b-a)^2}{2(a+b)} \geq 0$$

であるので, $r_2<r \leq r_3$ に対し, $y=f(r)$ は I^+ において $y=f(x)$ と交わり, I^- において $y=g(x)$ と交わることがわかる.

最後に, (2) (iii) の場合, 直線 $y=f(r_1)$ は漸近線 $y=a-b$ の上部にあるので, $r_1 \leq r \leq r_3$ に対し, I^- において, $y=f(r)$ と $y=g(x)$ は 1 点で交わることがわかる.

(3) $y \geq a-b$ に対し, 方程式 $y=f(x)$, $y=g(x)$ を解く．この 2 つの方程式 $y-\sqrt{B(x)}=\pm\sqrt{A(x)}$ の両辺を 2 乗して移項すると, $2y\sqrt{B(x)}=y^2-2(a-b)x+a-b$ が得られる．さらに両辺を 2 乗して, 整理すれば, x の方程式

$$\begin{aligned}&4(y^2-(a-b)^2)x^2+4(a+b)(y^2+(a-b)^2)x\\&-(y^2+(a-b)^2)(y^2+(a+b)^2)=0\end{aligned} \tag{2.9}$$

を得る.

$y=f(r)$, $r \in I^+$ について, 方程式 (2.9) は高々 2 個の解を持つ．その 1 つの解は $x=r$ であるので, $y>a-b$ の範囲では, もう 1 つの解 x が $y=f(x)$ または, $y=g(x)$ の解として得られる [1].

今, $x=r$ 以外のもう 1 つの解を $x=s(r)(\in I^-)$ とおけば, 解と係数の関係より,

$$s(r)=-r-(a+b)\frac{f(r)^2+(a-b)^2}{f(r)^2-(a-b)^2} \tag{2.10}$$

となる．更に, $d(r)=A(r)B(r)$ とおき, 第 2 項の分母分子に $A(r)+B(r)-(a-b)^2-2\sqrt{d(r)}$ をかけ, 有理化することにより,

$$s(r)=-r+(a+b)\frac{r^2-(a+b)r+ab-\sqrt{d(r)}}{2(a+b)r-a^2-b^2} \tag{2.11}$$

が得られる.

一方で, $y=a-b$ のとき, 方程式 (2.9) の解は $x=r_2$ であることがわかる．(2) (ii) の場合では, $y=a-b$ と $y=f(x)$, $x \in I^+$ が $(r_2, a-b)$ において交わり, $r \leq r_2$ の範囲では, $f(r) \leq a-b$ となるため, $f(x)=f(r)$ が $x=r$ のみを解を持ち, $g(x)=f(r)$ は解を持たないことがわかる．また, $r=r_{-1}$ のとき, $d(r_{-1})=0$ であるので, (2.11) より, $r_3=s(r_{-1})=\frac{\lambda a-b}{\lambda a+b}a$ が得られる.

最後に, $r \in I^+$, $f(r)>a-b$ のとき, $x=s(r)$ が, (2) (i)–(iii) の各場合に従って, $f(x)=f(r)$ または $g(x)=f(r)$ の解であることを確認する．ただ, 計算は非常に煩雑であるので, ここでは要点のみを提示する．まず, Maxima を用いた直接計算によって,

$$A(s(r))(f(r)^2-(a-b)^2)^2=4h(r)^2, \tag{2.12}$$

$$B(s(r))(f(r)^2-(a-b)^2)^2=4k(r)^2 \tag{2.13}$$

が得られる．ここで, $h(r)$, $k(r)$ は関数

$$\begin{aligned}h(x)&=2(x^2+2bx-a^2)\sqrt{A(x)}\\&\quad+2(x^2+(a+b)x+ab-2a^2)\sqrt{B(x)}\\k(x)&=2(x^2+2ax-b^2)\sqrt{B(x)}\\&\quad+2(x^2+(a+b)x+ab-2b^2)\sqrt{A(x)}\end{aligned}$$

の $x=r$ での値である．このとき,

$$2(h(r)+k(r))=f(r)(f(r)^2-(a-b)^2) \tag{2.14}$$

が成り立つ．従って, $r \in I^+$ に対し, $h(r)$, $k(r)$ の符号を確認すればよい．まず, $r^2+2ar-b^2=A(r)+a^2-b^2>0$ である．また, $y=x^2+(a+b)x+ab-2b^2$ のグ

[1] 任意の $y(\neq \pm(a-b))$ に対し, (2.9) は異なる 2 つの実数解を常にもつ．それは方程式 (2.9) が, $y=f(x)$, $y=g(x)$ 以外にも, $y=-f(x)$, $y=-g(x)$ でも成立するからである．つまりこの方程式の解から, 直ちに $y=f(x)$ または $y=g(x)$ の解が得られるとは限らない．しかし $y>a-b$ の条件のもとでは, $x=r$ 以外の解は, $y=f(x)$ または $y=g(x)$ を満たす.

ラフは下に凸で, $x=-\frac{a+b}{2}<0$ 上に頂点を持つので, I^+ で単調増加であり, $x=r_1$ で最小値をとる. そして, $a>b$ なので, $r\in I^+$ に対し, $r^2+(a+b)r+ab-2b^2\geq r_1^2+2br_1-b^2=B(r_1)>0$ である. 従って, $k(r)>0$ である. 特に $\sqrt{B(s(r))}(f(r)^2-(a-b)^2)=2k(r)$ である.

以下, $h(x)$, $x\in I^+$ の符号について考える. まず, $x^2+2bx-a^2$, $x^2+(a+b)x+ab-2a^2$, $\sqrt{A(x)}$, $\sqrt{B(x)}$ は全て I^+ で単調増加であるので, $h(x)$ は I^+ 上単調増加連続関数である.

方程式 $h(x)=0$ となる $x\in I^+$ は, 方程式 (2.12) より, $A(s(x))=0$ を満たすので, $s(x)\in I^-$ より, $s(x)=r_{-1}$ である. 従って, $x=r_3$ であることがわかる. $h(x)$ は $x\in I^+$ において $x=r_3$ のみを零点に持つが, 十分大きな x に対し, $h(x)>0$ であるので, $h(x)$ が単調増加であることから, $x>r_3$ なら $h(x)>0$, $x<r_3$ なら $h(x)<0$ であることがわかる. 従って,

$$2h(r)=\begin{cases}\sqrt{A(s(r))}(f(r)^2-(a-b)^2) & r\geq r_3,\\ -\sqrt{A(s(r))}(f(r)^2-(a-b)^2) & r<r_3\end{cases}$$

である. 以上より,

$$2h(r)+2k(r)=\begin{cases}f(s(r))(f(r)^2-(a-b)^2) & r\geq r_3,\\ g(s(r))(f(r)^2-(a-b)^2) & r<r_3\end{cases}$$

が得られ, (2.14) より,

$$\begin{cases}f(s(r))=f(r) & r\geq r_3,\\ g(s(r))=f(r) & r<r_3\end{cases}$$

が成り立つことがわかる. □

(問題 3 の解法). 大球の中心を $O_大$ とし, 乙円の中心を O_0 とする. また軸 ℓ を甲球の中心 O_1, 丙の中心 O_2 を含むようにとる. 甲球, 丙球は軸 ℓ に関する 90° 回転で固定されるように配置されている. 更に, 1 つの甲円の中心と, 1 つの丙円の中心及び軸 ℓ は同一平面上にあると仮定してもよい. このとき, この平面で切断した図形は図 5 のようになる.

大球, 甲球, 丙球, 乙球の半径を R,a,b,r とする. また $a>b$ と仮定する. 4 つの甲球 (丙球) の中心を取る平面と軸 ℓ との交点を M_1 (M_2) とすると, 図 6 のようになる. $O_1M_1=\sqrt{2}a$, $O_2M_2=\sqrt{2}b$ であり,

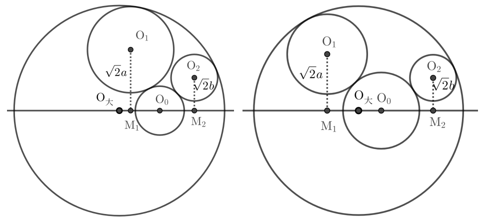

図 5. 切断面 (縦) の図. 左が (Case 1), 右が (Case 2)

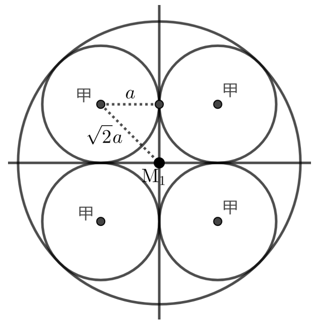

図 6. 切断面 (横) の図

$O_0O_1=r+a$, $O_0O_2=r+b$ なので,

$$O_0M_1=\sqrt{r^2+2ar-a^2}=\sqrt{A(r)},$$
$$O_0M_2=\sqrt{r^2+2br-b^2}=\sqrt{B(r)}.$$

同様に $O_大O_1=R-a$, $O_大O_2=R-b$ より,

$$O_大M_1=\sqrt{R^2-2aR-a^2}=\sqrt{A(-R)},$$
$$O_大M_2=\sqrt{B(-R)}$$

である.

球の配置としては, 次の場合が考えられる.

(Case 1) $O_大$ が線分 M_1M_2 の両端または外分する場合. この場合, $a>b$ より, $M_1O_大=A(-R)<B(-R)=M_2O_大$ であることがわかる. よって,

$$\begin{aligned}M_1O_0+O_0M_2&=M_1M_2\\&=M_2O_大-O_大M_1\end{aligned}$$

となり, $f(r)=g(-R)$ が成り立つ. 従って, 補題 2.1 より, $x=-R$ は $g(x)=f(r)$ の $x\in I^-$ における解であり, $R=-s(r)$ を得る.

(Case 2) $O_大$ が線分 M_1M_2 内部にある場合. この場合,

$$\begin{aligned}M_1O+OM_2&=M_1M_2\\&=M_1O_大+O_大M_2\end{aligned}$$

となる．よって，$f(r) = f(-R)$ が成立している．従って，補題 2.1 より，$x = -R$ は $f(x) = f(r)$ の $x \in I^-$ における解であり，$R = -s(r)$ を得る．

いずれの場合も，$R = -s(r)$ であり，

$$R = r + \frac{(a+b)(-r^2 + (a+b)r - ab + \sqrt{d(r)})}{2(a+b)r - (a^2+b^2)} \tag{2.15}$$

であることがわかる． □

術文と比較する．天 $= 2(a+b)$ である．また

$$\begin{aligned}\frac{\text{地}}{4} &= 2(a+b)r - (a^2+b^2),\\ \frac{\text{人}}{4} &= (a+b-r)r - ab\\ &= -r^2 + (a+b)r - ab.\end{aligned}$$

このとき，

$$\begin{aligned}&\frac{\text{人}^2 + 2\,\text{地乙}^2}{16}\\ &= r^4 + 2(a+b)r^3 + (4ab - a^2 - b^2)r^2\\ &\quad - 2ab(a+b)r + a^2b^2\\ &= d(r)\end{aligned}$$

である．これを (2.15) に代入することで，術文の式が得られる．

補足 3.1. (浅山 2019) では，$2\text{天}\times\text{乙}-(\text{甲}^2+\text{乙}^2) = \text{地}$ とあったが，正しくは $2\,\text{天}\times\text{乙} - (\text{甲}^2 + \text{丙}^2) = \text{地}$ である．

補足 3.2. この問題は神壁算法 P36(藤田 1807) にある問題で，算法天生法指南第 201 題 (藤井 1997) にも和算解がある．

補足 3.3. 状況の場合分けが非常に複雑な問題であった．高校生には，難しい問題であると考えられる．

2.4 第 8 巻第 8 問

問題 4. (問題 8-8)

(問題文) 今，図 7 のように，六面体内に 3 矢を設け，3 筒の正方形を容れる．六面体の一辺 1666 寸，矢各平面 2499 寸のとき，正方形の一辺を求めよ．

(答え) 正方形の一辺 809 寸 000 有奇．

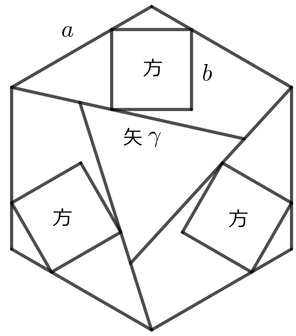

図 7. 問題 8-8 の配置

(術文) $4(4\,\text{六角面}^2 - \text{矢}^2) = \text{乾}$，$\sqrt{\text{乾}} + 3\,\text{矢} = \text{坤}$ とし，

$$\frac{\text{六角面}}{\left(\frac{\text{坤}}{\sqrt{3\,\text{乾}}} + \frac{1}{2}\right)} = \text{方面}.$$

この問題は初等幾何的に解くことも可能 (谷本 (2023)) であるが，複素数を用いた解法を紹介する．

(解法). 正六角形の 1 辺の長さを a，矢を γ とする．3 つある正方形は合同であるので，ひとつの正方形に着目する．正六角形の隣り合う 2 辺と，矢を含む四角形を複素数平面に表すと，図 8 のようになることがわかる．

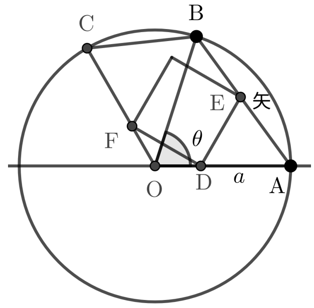

図 8. 問題 8-8 の解法の配置

実際，図 8 において，点 $\mathrm{C, O, A}$ が正六角形の (3 つの隣り合う) 頂点であり，点 B は 2 つの矢の交点である．また，$\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{AOC} = \frac{2\pi}{3}$ であるので，円周角の定理の逆から，$\mathrm{A, B, C}$ は O を中心とする半径 a の円周上にあることがわかる．今，複素数平面において，$\mathrm{O} = 0$ とし，$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ とおく．このとき，$\mathrm{A} = a$,

$\mathrm{B} = ae(\theta)$, $\mathrm{C} = ae(\frac{2\pi i}{3})$ である．ただし，

$$e(\phi) = e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

とおいた．従って，

$$\begin{aligned}\gamma^2 = \mathrm{AB}^2 &= a^2|e(\theta) - 1|^2 \\ &= a^2(2 - e(\theta) - e(-\theta)) = 2a^2(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$\cos\theta = 1 - \frac{\gamma^2}{2a^2}, \quad \sin\theta = \frac{\gamma\sqrt{4a^2 - \gamma^2}}{2a^2}$$

次に, $\mathrm{D} = x(> 0)$ とおくと, $\mathrm{F} = xe(\frac{2\pi}{3})$ であり，

$$\mathrm{E} = x + (-i)\left(xe\left(\frac{2\pi}{3}\right) - x\right) = x\left(1 + i + e\left(\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

一方, E は線分 AB 上にあるので, 実数 $0 < r < 1$ を用いて，

$$x\left(1 + i + e\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = (1 - r)a + rae(\theta)$$

と表される．実部, 虚部を比較して，

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = a + ra(\cos\theta - 1) = a - \frac{r\gamma^2}{2a},$$

$$\frac{3x}{2} = ra\sin\theta = \frac{r\gamma\sqrt{4a^2 - \gamma^2}}{2a}.$$

従って, $r = \frac{3ax}{\gamma\sqrt{4a^2 - \gamma^2}}$ であり，

$$\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)x = a - \frac{3\gamma x}{2\sqrt{4a^2 - \gamma^2}}.$$

よって，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{4a^2 - \gamma^2} + 3\gamma}{2\sqrt{4a^2 - \gamma^2}}\right)x = a.$$

最後に b を方面とおけば, $b = \mathrm{FD} = \sqrt{3}x$ より, 術文

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4(4a^2 - \gamma^2)} + 3\gamma}{\sqrt{12(4a^2 - \gamma^2)}}\right)b = a$$

を得る． □

補足 4.1. 資料 (浅山, 2019) では, 問題の矢が 499 とあったが, 原典では 2499 であったため修正した．$a = 1666$, $\gamma = 2499$ とすると，

$$b = 809.0006812025923\cdots$$

で (答え) と合う．

補足 4.2. この問題は神壁算法上巻 P37(藤田 1807) にある問題である．

2.5 第 8 巻第 9 問

問題 5. (問題 8-9)

(問題文) 今, 図 9 のように, 直角三角形内を 2 斜で隔て, 楕円 2 箇 (2 つは同形) を容れる．只云う, 股 149 寸に対し, 長径 59 寸 (長径 $= \frac{59}{149}$ 股) のとき, 勾でもって短径を除した数はいくらか．

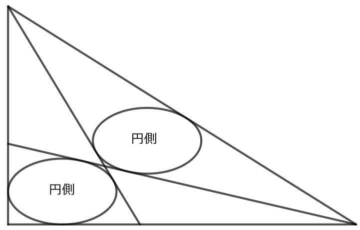

図 9. 問題 8-9 の配置

(答え) 勾でもって短径を除した数 0.2000 寸有奇．

(術文)

$$(4\,分母 - 分子)\,分子 = 陰$$
$$(2\,分母 + 分子)\,分母 - 陰 = 陽$$

とし，

$$\frac{2(\sqrt{(分母 - 2\,分子)\,分母 \times 陰 + 陽^2} - 陽)}{陰} = \frac{短径}{勾}.$$

この問題に取り組むために, 和算解では, 楕円が円の場合を考える．ここでは, 天生法百景第 18 番で取り上げられている問題を紹介し, その公式を用いる．

補題 2.2. (二代目 2018) 図 10 において，

$$甲乙 - (三和)\,乙 + 三和\,(全 - 甲) = 0. \tag{2.16}$$

である． ただし, 三和 = 勾 + 股 + 弦 であり, 全 = 勾 + 股 − 弦 である．

この問題の解法では, 図 11 のように設定する．

補題 2.2 の証明. 図 11 のように甲円の中心を D, 半径を r, 乙円の中心を F, 半径を s, 勾, 股, 弦をそれぞれ, a, b, c とおく．A から引いた甲円, 乙円における共通接線との接点をそれぞれ L, N とおき, C から引いた甲円, 乙円の共通接線との交点をそれぞれ K, M とおく．そして 2 つの共通接線の交点を O とし, $k = \mathrm{MO}$, $j = \mathrm{LO}$, $\mathrm{AN} = h$ とおく．

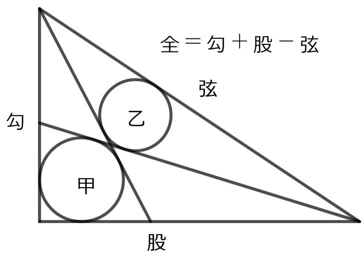

図 10. 補題 2.2 の配置

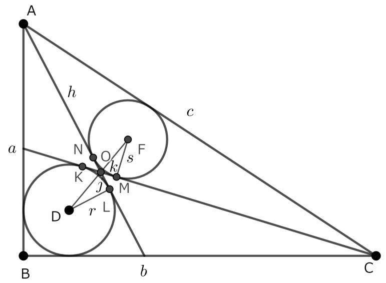

図 11. 補題 2.2 の証明の配置

$\mathrm{AN}+\mathrm{CM}=c$ なので, $\mathrm{CM}=c-h$ である．また $\mathrm{AL}=a-r$, $\mathrm{CN}=b-r$ である．$\mathrm{MK}=\mathrm{NL}=k+j$ なので, $h+k+j=a-r$, $c-h+k+j=b-r$．これより,

$$k+j=\frac{R-2r}{2},\quad h=\frac{a+c-b}{2} \tag{2.17}$$

を得る．ここで, $R=a+b-c$ である．

今, $\triangle\mathrm{FOM}$ について, $\tan(\angle\mathrm{FOM})=\frac{s}{k}$ であり, $\triangle\mathrm{DOL}$ について, $\tan(\angle\mathrm{DOL})=\frac{j}{r}$ である．更に, $\angle\mathrm{FOM}=\angle\mathrm{FON}=\angle\mathrm{DOL}$ なので,

$$t:=\tan(\angle\mathrm{FOM})=\frac{s}{k}=\frac{r}{j}$$

である．従って, $k=\frac{s}{t}$, $j=\frac{r}{t}$ となり, $k+j=\frac{r+s}{t}$ となる．よって, (2.17) より,

$$t=\frac{2(r+s)}{R-2r} \tag{2.18}$$

であることがわかる．以上より,

$$h=\frac{a+c-b}{2},\quad c-h=\frac{b+c-a}{2},\quad k=\frac{s(R-2r)}{2(r+s)}$$

を得る．$T=a+b+c$ とおくと, $TR=2ab$, $T-R=2c$ なので,

$$\begin{aligned}c+k&=\frac{T-R}{2}+\frac{s(R-2r)}{2(r+s)}\\&=\frac{(T-R)r+s(T-2r)}{2(r+s)}\end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}h(c-h)k&=\frac{(c^2-(a-b)^2))s(R-2r)}{8(r+s)}\\&=\frac{2abs(R-2r)}{8(r+s)}\\&=\frac{TRs(R-2r)}{8(r+s)}.\end{aligned}$$

従って, s は $\triangle\mathrm{OCA}$ の内接円の半径なので, (愛媛算額 (2017)) 補助定理 13 (3) より, $s^2(c+k)=h(c-h)k$ が成り立ち, r,s は方程式

$$\begin{aligned}&4(T-2r)s^2+4(T-R)sr-TR(R-2r)\\&=(2(T-2r)s-T(R-2r))(2s+R)=0\end{aligned}$$

を満たすことがわかる．$2s+R>0$ より,

$$4rs-2T(r+s)+TR=0$$

が得られ, 甲 $=2r$, 乙 $=2s$, $T=$ 三和, $R=$ 全 より, これが求める式である． □

(問題 8-9 の解法). 問題 8-9 は楕円であるが, $\lambda=\frac{\text{長径}}{\text{短径}}$ とおき, 直角を中心に勾を含む軸方向に λ 倍する．この変換で, 短径は λ 倍されて長径と等しくなるが, 勾と短径の比 $\frac{\text{短径}}{\text{勾}}$ は一定のままであることがわかる．以上より, 変形後の直角三角形の勾の長さを 勾$'(=\lambda$勾$)$ とおけば,

$$\frac{\text{短径}}{\text{勾}}=\frac{\text{甲}}{\text{勾}'}=:X$$

となり, 楕円が円の場合に帰着されることがわかる．

この場合は補題 2.2 の甲円径 = 乙円径の場合を考えれば良い (和算解もそのように考えている)．全は直角 3 角形の内接円であり, その直径も全と表す．三和 = 勾 + 股 + 弦 であり, 全 = 勾 + 股 − 弦 となる．更に今の場合, 甲 = 乙 であるので, 三平方の定理 (勾弧弦の術) を用いると, (2.16) は,

$$\text{甲}^2-2(\text{勾}+\text{股}+\text{弦})\,\text{甲}+2\,\text{勾股}=0 \tag{2.19}$$

となる．

今, $a=\frac{\text{甲}}{\text{股}}=\frac{\text{分子}}{\text{分母}}$, $x=\frac{\text{勾}}{\text{股}}$ とおく．a は $0<a<\frac{1}{2}$ を満たすことに注意する．このとき, (2.19) の両辺を 股^2 で割って, 方程式 $a^2-2(x+1+\sqrt{x^2+1})a+2x=0$ を得る．$2a\sqrt{x^2+1}$ を移項後, 両辺を 2 乗し整理すると．

$$4(1-2a)x^2-4a(a^2-3a+2)x+a^4-4a^3=0.$$

最後に, 両辺を a^2 で割り, $X=\frac{a}{x}$ とおけば, X の 2 次方程式 $a(4-a)X^2+4(a^2-3a+2)X-4(1-2a)=0$ が得られる．$a(4-a)>0$ であり, $-4(1-2a)<0$ なので, この 2 次方程式の 2 つの解の符号は異なり, 正の解は,

$$X=\frac{-2(a^2-3a+2)+2\sqrt{(a^2+2)(a^2-4a+2)}}{a(4-a)}$$

であることがわかる．

ここで, 術文と比較する．

$$\frac{陰}{股^2}=(4-a)a,\ \frac{陽}{股^2}=(2+a)-\frac{陰}{股^2}=a^2-3a+2$$

である．そして,

$$\begin{aligned}&\frac{(分母-2\,分子)\,分母\times陰+陽^2}{分母^4}\\&=(1-2a)\frac{陰}{股^2}+\frac{陽^2}{股^4}\\&=(1-2a)a(4-a)+(a^2-3a+2)^2\\&=(a^2+2)(a^2-4a+2)\end{aligned}$$

を得る．よって,

$$\frac{甲}{勾}=X=\frac{2(-陽+\sqrt{(分母-2\,分子)\,分母\times陰+陽^2})}{陰}$$

が得られる．　□

補足 5.1. (浅山 2019) では,

$$\frac{2\sqrt{(分母-2\,分子)\,分母\times陰+陽^2}-陽}{陰}=\frac{短径}{勾}.$$

とあったが, 正しくは, 上述の通りである．実際に与えられた値を代入すると,

$$\frac{短径}{勾}=0.2000068886278283\cdots$$

が得られる．

補足 5.2. この解法は谷本 (2023) で紹介された和算解と同じ方針である．

補足 5.3. この問題は神壁算法上巻 P37(藤田 1807) にある問題である．

3　終わりに

本論文では, 愛媛和算研究会で発表の無かった雑題第 8 巻の後半部分の現代解を与えた．和算解については, 2023 年 2 月 16 日に開催の第 48 回愛媛和算研究会の定例会において谷本氏によりまとめられており, いくつかの問題は, 解法が類似している．今回紹介した問題については, 問題 8-7 の解析に時間を要したため, 第 10 巻 (吉平他 (2024)) の後での公表となった．現在, 愛媛和算研究会では, 第 11 巻〜第 20 巻の読みを行っている．今後, その成果についても継続してまとめていきたいと考えている．

今回取り組みの結果, やはり多くの問題について高等学校までの知識で十分対応可能であると考えられる．楕円や複素数については, 現行のカリキュラムでは高校生に十分な力を付けることは難しいと思われるが, これらの問題を通して, それらの単元に慣れるきっかけとなれば幸いである．

参考文献

藤田貞資 (1807) , 神壁算法上巻, 京都大学貴重資料デジタルアーカイブ
`https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028551?page=37`

大西佐兵衛 (不明) , 『雑題』, 愛媛県立図書館 (所蔵).

二代目 福田理軒 (2018) , 『天生法百景』.

愛媛算額 (2017) : 愛媛の算額研究〜現代解法を通して〜, 平田浩一, 谷本賢治 編, 愛媛和算研究会.

藤井康生 (1997) : 『算法天生法指南』(全五巻) 問題の解説, 大阪教育図書株式会社.

浅山秀博 (2019) : 『雑題』三十巻 (大西佐兵衛著) を読むにあたって (その 1), 愛媛和算研究会.

谷本 賢治 (2023) : 巻八 [8-7][8-8][8-9」の和算解について，第 48 回愛媛和算研究会発表資料.

宮崎智也, 吉岡倖佑, 原本博史, 安部利之 (2023) : 大西佐兵衛『雑題』の現代解について〜第 8 巻第 1 問から第 4 問〜, 科学教育研究センター紀要 **2**, 17–22, 愛媛大学教育学部附属科学教育センター.

吉平善晴, 保木隆之介, 牟田口正虎, 原本博史, 安部利之 (2024) : 大西佐兵衛『雑題』の現代解について〜第 10 巻全 5 問〜 , 科学教育研究センター紀要 **3**, 9–15, 愛媛大学教育学部附属科学教育センター.