

数学的な知識・概念の共有過程における根拠に関する研究 (I)

Research on the reason of the sharing process of mathematical knowledge and concepts (I)

吉村 直道

YOSHIMURA Naomichi

愛媛大学教育学部

Faculty of Education, Ehime University

【要約】 本研究の目的は、一般的に客観的と考えられる数学的な知識・概念であっても、学習者が当初構成する知識は主観的・個人的なものであることをどのように理解すればよいかを明らかにすることである。そのため、学習者が構成した知識・概念を可視化して捉える枠組みとしてトゥールミンモデルを、算数・数学の学習過程で用いやすいように修正した「論理的な主張のレイアウト」を提案した。6名の数学系大学院生へのアンケート調査にこのレイアウトを用いた結果、同じコミュニケーション過程であっても、条件(D)・理由付け(W)・主張(C)の構成が異なったり、条件が同じでも理由付けの違いによって主張が変化したりするなど、学習者の知識・概念は主観的・個別的であることが確認され、提案したレイアウトを通してその個別性を明確にすることができた。今後は、このレイアウトを授業に組み込み、個別性を尊重しつつ準客観的な知識・概念に洗練させる方法の検討が必要である。また、小規模調査であるため、対象者の拡大や背景要因の分析、再現性の検証が課題である。

【キーワード】 コミュニケーション研究, 論理的な主張のためのレイアウト, トゥールミンモデル, 根拠, 数学的な知識・概念の共有過程

I. 研究目的

数学(以下、算数を含めて数学と表現)の学習で構成する知識・概念と言えど、当初は主観的で個人的なものであり、それらが洗練されていくことで他者にも通用する知識・概念と成り得て準客観の意味での客観性を有していくと考えることができる。それを明らかにするために、本稿では、数学的な知識・概念を対象化する枠組みを構築し、その枠組みを用いたアンケート調査で、当初構成される数学的な知識・概念がなぜ個別的で主観的と成り得るかについての構造を明らかにすることが、本稿の研究目的である。

II. 学習で構成した知識・概念を可視化する枠組み

数学の学習場面では、授業者のコーディネートのもとと数学的な議論が展開され学習が進んでいく。本研究では、数学の授業という同一のコミュニケーション活動に参加した上で、各学習者たちがどのような知識・概念を構成したかに注目する。

1. 議論のレイアウト(トゥールミンモデル)

議論を分析的にみる際のモデルとして有用なものが、1958年に出版された『議論の技法(The Use of Argument)』において提示された「議論のレイアウト」、

後に「トゥールミンモデル」と呼ばれ広まったものである(渡部, 2023, p.54)。図1がトゥールミンモデルを表したものである。

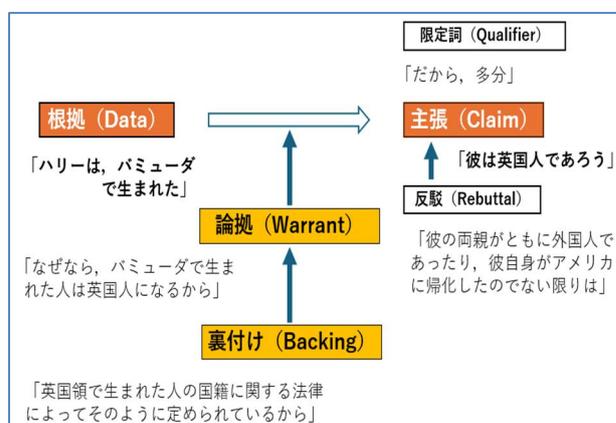


図1: 「議論のレイアウト」の事例「ハリーの国籍」

※渡部(2023), 福澤(2002)を参考に筆者修正

このトゥールミンモデルを用いて議論の一場面を記述することができ、その主張の正当化の構造を顕在化することができる。隠れた根拠を、論拠(Warrant)、裏付け(Backing)として対象化するとともに、裏付け(Backing)の存在がその主張(Claim)の正当性を制限しながら強めることになり、限定詞(Qualifier)と反駁(Rebuttal)が必要となるものである(渡部, 2023, p.56)。

2. 論理的主張のレイアウト (修正トゥールミンモデル)

日常生活の蓋然的な論証である「実質的論証」と、「ソクラテスは人間である (D). すべての人間はいつか死ぬ (W). ゆえに、ソクラテスは死ぬ (C)」と言った演繹三段論法のような疑いの余地なく分析的に議論できる論証の2つに、このトゥールミンモデルは適用可能である。加えて、論拠 (Warrant), 裏付け (Backing) の多様さは論証の場 (分野や文脈, 用いられている状況) によって異なることが認められており、様々に適用可能であり議論を記述的に分析するのに有用である (渡部, 2023, p.57)。

しかしながら、トゥールミンモデルは議論、主張の応答、言明のレレーションを記述するモデル (複数人の主体者による複数の会話ターンの記述) であるが、本研究において対象化しようとするのは、数学の学習において構成された各学習者の知識・概念であり、個々の主張 (言うなれば、1ターンの言明) である。一つの主張も掘り下げれば、それを生み出すきっかけの根拠と、その主張の正当さを確かなものとするために数々の制限を含み持つものであり、一主張だけをトゥールミンモデルで記述することも可能であると考えられる。ただし、ある問題解決の場面での個々の主張の記述や、自身の考えや理解が曖昧なまま認識され表現されている場面での記述であったりもするので、必ずトゥールミンモデルのすべての要素でその言明の構造が記述されるわけではない。

本研究の立場では、数学の概念も相対的であり、修正・改善を経て準客観的な性格を帯びるものと捉えている。併せて、個人の概念形成は素朴な段階からより洗練されたものへと移行すると捉えている。そのため、学習における概念形成のプロセスを記述しようとする取り組みにおいては、「根拠 (Data)」や「論拠 (Warrant)」といった洗練された理由と言ったものばかりではない。よって、モデルの構成要素をもう少しおおらかに緩く定義していきたい。

本稿の研究では、単なる主張、理由のない主張への適用は考えていない。発信者にとって理由があり論理的と考えている主張 (論証) を、「論理的な主張」 (他者や他者を超えて準客観的な理解を求める主張、「根拠」「論拠」「裏付け」などの要素を伴って構造化された主張) とし、本稿研究の対象とする。

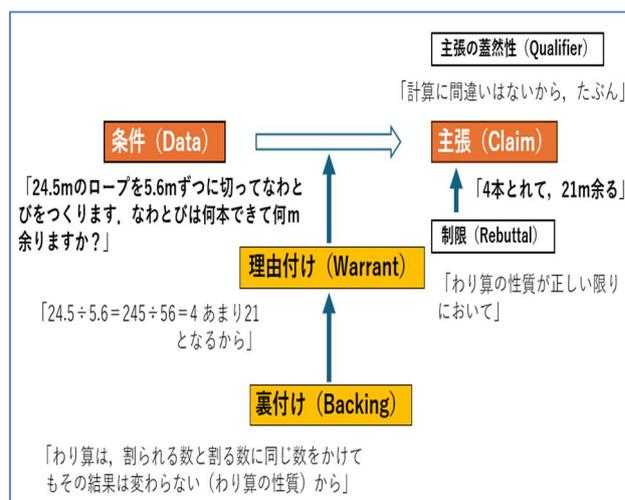


図2：論理的な主張のレイアウト

よって本稿では、図2の示す通り、「論理的な主張のレイアウト」としてトゥールミンモデルの修正版を用いることとする。数学の学習場面で用いるこの修正版トゥールミンモデルでは、問題場面や問題状況・設定そのものを条件 (D) とし、その条件 (D) から主張 (C) として答えが導かれるとして、その過程を記述することが可能となるものである。

図2の論理的な主張のレイアウトは、次の①～⑥から成り立つ (具体例は、図2中に記述)。

- ①**条件 (Data)** : 主張を導き出す具体的な言明。
「～のとき/～であるとき」「～ならば/～であるならば」
- ②**主張 (Claim)** : 条件 (D) から導かれる特定の言明。
「～である」「～となる」
- ③**理由付け (Warrant)** : 条件 (D) から主張 (C) を導き出す理由 (根拠, 証拠, 事実, 背景事情, 動機, 感情※論理的でないものも含む)。
「～だから」「一般的に～だから」「～と考えられるから」「なぜなら～だから」
- ④**裏付け (Backing)** : 理由付け (W) を支える理由付け。
「(なぜなら) ～だから/と考えられるから」
- ⑤**主張の蓋然性 (Qualifier)** : 主張が導かれる確かさの程度。主張の正当性をより強固にするための制限。
「おそらく」「たぶん」「きっと」等

- ⑥制限 (Rebuttal) : 正当性を強めるために、反駁の事実を自覚するとともに、主張の正当性の保留条件の明示。
「～でない限りにおいて」「～の範囲内で」

図2中の具体例は、妥当でない主張の例である。この主張の発信者にとっては理由があり論理的とみなしている主張であり、その点で本稿では(発信者にとって)「論理的」と言っているにすぎない。つまり本研究においては、「論理的」にも、自分自身だけが再現性をもって主張を導出できるものから、他者にも理解され他者間においても再現性を有してその主張が変わらず導出できる意味での準客観性を有するレベルまで、「論理的」には漸次的特徴があると認めている立場である。

ここで、ここまでに登場した用語について、本稿での扱いを整理する。それが図3である。

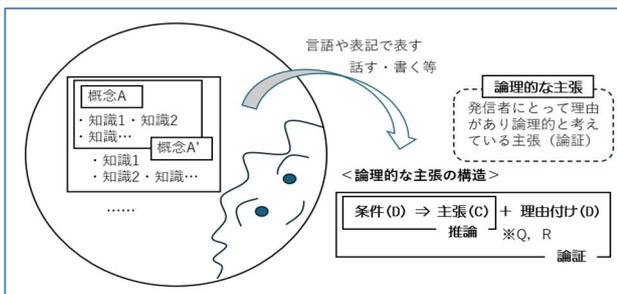


図3：知識・概念と論理的な主張の関係

本稿では、「概念」を数学的な対象を理解する枠組みとし、「知識」をその概念を使って得られる事実・定理・手続きや具体例と捉えることとする。知識・概念は基本的に主体者の頭の中に存在するものであり、言語や表記で対象化・可視化され理解されるものであり、言語や表記を用いることで健在化されるものである。そして、概念と知識の一連のネットワークが新しい概念枠となり、更なる知識群を生み出す階層的構造を特徴としてもつ。

そして本稿では、たとえ数学的に誤っていたとしても、発信者にとって理由があり論理的と考えている主張(論証)を研究対象としており、言語を用いてそれを明文化したものを「論理的な主張」と定義する。しかもその主張(論証)の構造を修正ツールミンモデルで記述したとき、さらに細かく対象化する必要がある場合、「条件(D) ⇒ 主張(C)」の構造を「推論」とし、その推論に理由付け(W)、主張の蓋然性(Q)及

び反駁(R)まで含めたものを「論証」と区別するものとする。

3. 妥当な主張の記述の可能性

本研究で規定した「論理的な主張のレイアウト」を用いてどのようなタイプの妥当な主張が記述できるか、戸田山(2022)がまとめている「論証形式のまとめの表」(p.193)を基に、ここに整理する。

○論理的な主張のレイアウトを用いた、妥当な論理的な主張の構造

- ア：肯定式推論 D「Aである」+W「AならばBである」⇒C「Bである」
- イ：否定式推論 D「Bではない」+W「AならばBである」⇒C「Aではない」
- ウ：場合分けによる証明 D「AかBのどちらかである」+W「AならばCである。BならばCである」⇒C「いずれにせよCである」
- エ：背理法 D「今Bである。Aでないと仮定すると矛盾(notB/A/これまでの定理の否定)」+W「排中律を認めるから/論理的に不整合が起きるから」⇒C「Aである」
- オ：転換法 D「一群の定理 $A_1 \Rightarrow B_1, A_2 \Rightarrow B_2, \dots, A_n \Rightarrow B_n$ 」+W「 A_1, A_2, \dots, A_n が対象とする事柄のすべての場合を尽くして、 B_1, B_2, \dots, B_n が互いに排反である」⇒C「一群の定理 $B_1 \Rightarrow A_1, B_2 \Rightarrow A_2, \dots, B_n \Rightarrow A_n$ が成り立つ」
- カ：同一法 D「 $A \Rightarrow B$ 」+W「A, Bを満たすものがそれぞれちょうど1つしか存在しない」⇒C「逆命題 $B \Rightarrow A$ が成り立つ」
- キ：帰納的論証 D「Aもpである。Bもpである。Cもpである」+W「特別でない限り、次もそうだろう/ほとんどがそうだから、次もそうだろう/偶然ではなく必然と考えるのが自然だろう/経験に基づく蓋然的推測(必ずそうなるとは言えないが、かなりの確率でそうだと考えられる推測)から」⇒Q「おそらく」+C「みんなpである」+R「反例が見つからない限り」
- ク：アブダクション D「仮説HでAが説明できる」+W「何かしらの原因があつてAが起こるから」⇒Q「たぶん」+C「仮説Hは正

しい」+R「H以上にAを説明できる仮説がない範囲において」

ケ：仮説演繹法 D「仮説H(A⇒B)」+W「AのときBであったから」⇒Q「たぶん」+C「Hは正しい」+R「I事例の確かめの範囲内で/仮説の正当性の範囲内で」

コ：類推 D「AはBと似ている」+W「BはCである」⇒Q「たぶん」+C「AもCである」+R「一般化しない範囲内で」

上記の通り、具体例を示しながら「論理的な主張のレイアウト」を用いて、いろいろなレポーターをもつ妥当な主張が記述できることを確かめた。ただし、キ〜コの4つのレポーターについては、主張の正当化は弱いレベルであり、主張の蓋然性(Q)と制限(R)が必要となることには注意が必要である。

4. 個人的・主観的な性質をもち妥当性が疑問視される記述の可能性

次に、いろいろな主張には、論理的な主張であっても個人的・主観的な性質を有し、主張の妥当性に疑問の余地があるものがある。それらについても論理的な主張のレイアウトによって記述できるかどうかを検討する。

理由付け(W)は、基本的に、他者にも共有されるような時間的・空間的・文化的にもその正当性が認められ、他者と共通した意味をもつような理由付けでなければならないが、日常においては、得てして自分の経験や思考、感情が先立ち、それらを理由とした主張になることがある。つまり、ア：理由付け(W)が当該の個人やその主体者の主観に依拠していて、当該の推論と無関係で関連性が薄い場合がある。

例) D「家の玄関の置物のカエルと目があつた」+W「以前にも何度か目があつた後、雨が降ったから」⇒C：「もうすぐ雨が降る」

などである。理由付け(W)が実に個人的でその主体者のみでしか確認できないものであるが、こうしたものについても、論理的な主張のレイアウトによって例示可能である。

理由付け(W)は個人的・主観的なものでなければよいというわけではない。たとえ、それが客観的な言

明であっても、条件(D)から主張(C)が客観的に導出可能でないといけない。例えば、ア：肯定式推論であれば、その理由付け(W)は単称命題では十分ではなく、事実の一例でもその用を果たさない。つまり、イ：理由付け(W)が事実や事例の一例の提示にすぎずその確証性が薄い場合がある。

例) D「ソクラテスは人間である」+W「ソクラテスは死ぬ」⇒C：「人間は死ぬ」

また、条件(D)と理由付け(W)はいずれも「〜だから」や「〜とき」でCに連結できるものであり、DとWが入れ替わっても違和感をもたないことがある。主体者にとってどちらかをどのタイミングで明示するかでDにもWにも成り得る可能性があり、論証の型が人によって変わり得る特徴を持つ。この場合も、次の例のように論理的な主張のレイアウトによって例示可能である。つまり、ウ：条件(D)と理由付け(W)が曖昧に理解されており、混同されて論理的な主張が展開されることがあり、不十分な論証となることがある。

例) D「ソクラテスは人間である」+W「人間は死ぬ」⇒C「ソクラテスは死ぬ」

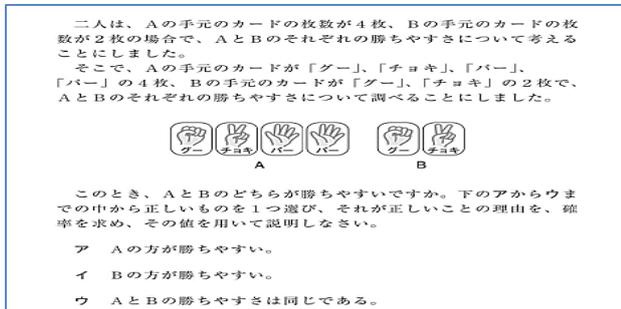
例) D「人間は死ぬ」+W「ソクラテスは人間である」⇒C「ソクラテスは死ぬ」

加えて子どもの主張が時にそうであるように、分析的に構造化されずに自分の知識・概念が理解されるとき、「CだからCなの」と主張(C)そのものが理由付け(W)になってしまうことがある。いわゆる循環論法に陥っているケースである。発信者が理由をもった主張と思っている、このように主張(C)が強力に意識されるためか、エ：理由付け(W)が主張(C)で満たされていたり、条件(D)や理由付け(W)が欠落した論理的な主張のレイアウトとなることがある。

例) W「ソクラテスは死ぬ」⇒C「ソクラテスは死ぬ」

また、数学の学習過程における理由は問題場面や問題状況、あるいは、学習展開によってある程度制限されるため、個人的・主観的な様相は減じるものの、そ

の理由については基本、主体者にその選択権がある。
オ：日常世界・数学世界・自分世界のどの世界の事柄からその事由を導出するかは個人によって多様であり、数学の学習過程における論理的な主張と言えど、



理由付け (W) が個人的・主観的に成り得る場合がある。

図3：じゃんけんカードゲームの問題

図3の令和7年度全国学力・学習状況調査（中学校数学）大問7(2)（国立教育政策研究所，2025，p.30）の解答を論理的な主張のレイアウトで記述すると、正答の例が

例①) D「Aが4枚、Bが2枚のカードのとき」＋
W「P(A) = 3/8, P(B) = 3/8だから」
⇒ C「AとBの勝つ確率は同じである」

となるとき、理由付け (W) が個人的・主観的なものである主張（論証）として、

例②) D「Aが4枚、Bが2枚のカードのとき」＋
W「同じ確率でないとゲームは面白くないから」
⇒ C「AとBの勝つ確率は同じである」

と、論理的な主張のレイアウトを用いて表現可能である。

以上より、主張の正当性が確かなものに加え、主張の正当性に疑問を呈するようなものであっても、提案する論理的な主張のレイアウトを用いてそれらの知識・概念は論証の形式で記述可能である。

Ⅲ. 調査

数学の学習場面において、学習者が認識する自身の知識・概念が「論理的な主張のレイアウト」を用いて実際にどのように記述できるかを調査した。

1. 調査内容・方法

(調査目的)

- ・数学の学習後、学習主体者はどのような知識・概念を得るのか。
- ・実際の学習場面において、論理的な主張のレイアウトを用いて、学習者が構成した知識・概念を記述することができるか。

(対象)

- ・2026年3月7日に愛媛大学附属高等学校で開催した「みんなで考える数学講座」に参加した大学院生6名※全員、理学部数学科出身

(内容)

- ・数直線の連続に関する講義（授業者は筆者）を受講し、①受講前段階での連続に関する理解、②9が限りなく続く0.99...と1の大小比較に関する理解、③数直線の連続や切断に関する理解の3つに対して自身が構成した知識・概念を調査した。

(調査方法)

講義終了後すぐに、紙面にて調査票を配り、研究目的等を説明し任意で研究協力をお願いした。了承を確認した上で、アンケート調査を実施した。調査票は巻末資料の通りである（A3判両面刷り）。

講義の際に配布したレジュメに自身が書き込んだメモを見ながら、調査票で指定した講義のタイミングで自身が認識した知識・概念を、「条件（ ）⇒主張（ ）」の形式で問うた。得られた他者の知識・概念と比較しやすいようにするために、予めそこで登場しそうな言明を語群として用意し、語群から適当なものを選んで回答するか、語群にふさわしいものがない場合は自身で自由に記述し回答する形とした。

その際、そう考える理由も記述式で回答するよう求めた。その際、記号「⇒」は、「ならば」や「のとき」と読みかえて判断するよう依頼した。

2. 調査結果と考察

まず講座自体の感想を5件法で問うた。

「講座の内容や説明はわかりやすかったか？」については6名中2名が「5:たいへんわかりやすかった」、4名が「4:わかりやすかった」。「講座の内容は面白い、興味深いものでしたか？」は「5:たいへん面白い」が5名、「面白い」が1名。「講座に参加した満足度は？」については「5:たいへん満足」の回答を全員の6名から得た。

総じて、講義自体の評価は高く、その理解についても参加者自体不安や消化不良を起こしたようなものではなかったと推測される。

a. 「連続」に関する既存の知識・概念

本格的に本講座の講義に入る前の段階で、「連続」に関する知識・概念として、どのようなものを有しているかを調査表の4①にて問うた（巻末資料参照）。

その結果、対象の6人から10個の回答で「連続」に関する講座前の知識・概念が得られた。ただし理由付け(W)については、回答のままでは冗長かつわかりにくさもあるため、筆者が意を変えないように要約して表1に整理している。

表1：調査表4①の回答結果（要約）

回答①	条件(D)	のとき／ならば	主張(C)	理由付け(W)	特徴
1	ア すき間や切断がない	⇒	ウ つながっている	ウであるためにはアでないといけないから	循環論法
2	ア	⇒	ウ	ウであるためにはアでないといけないから	循環論法
3	ア	⇒	ウ	図の様子から	考えた視点や契機
4	ア	⇒	ウ	図の様子から	考えた視点や契機
5	ア	⇒	ウ	※無記入	
6	イ すき間や切断がある	⇒	エ つながっていない	イだとエだから	循環論法
7	イ	⇒	エ	イだとエだから	循環論法
8	イ	⇒	エ	回答⑩10の対偶より	数学世界での知識から
9	イ すき間や切断がある	⇒	ウ つながっている	飛び飛びでもつながっていると考えられるから	循環論法 ※本時の講座内容の影響か？
10	ウ つながっている	⇒	ア すき間や切断がない	すき間の有無は条件になれず、結論になるから	他の事例との関係から

表1より、回答された10個中5個の推論が同じで、理由付け(W)まで同じものが2個、2個あった。1個は理由なしであった。6人中5人が同じ知識・概念を有しているものの、その理由まで含めるとまったく同じであるわけではないことがわかる。数学の知識に関わるものであり、かつ、数学を中心に研究する大学院生であるという特徴を考慮すれば、理由まで同じという論証となることは、当然のことのように思われる。その一方で、理由として表現される内容が異なったり、理由付け(W)が条件(D)から主張(C)を繰り返し言っているにすぎないものがあったり、自分たちの理解が必ずしも客観的に整理されたものではないことがよくわかる。

また、同じ条件(D)から導出される主張(C)は、

特に数学に関するものであれば、大抵同じであると予想されるが、同じイを条件(D)にして、主張(C)がエとウの2つに異なって表現されていることも特徴的である。ただし、この質問は講義前の知識・概念を問うものであるが、このアンケートが講座終了後に行っているために、回答⑨は講座内容が影響した知識・概念についての論証を表現している可能性もある。

表1から、理由付け(W)の内容について、目に見えるメタファーの中でのその理由を構築しているのが多く、回答⑧のように、数学世界の知識・概念を適用して理由にするものは少ないこともわかる。

b. 講座で構成した知識・概念1

講座の講義が本格的に始まった段階で構成した知識・概念を1人1つ以上2つまでで問うた。その結果、4人が2つ、2人が1つ回答したので、計10個の回答を得ることができた。その要約が表2である。

表2：調査表4②の回答結果（要約）

回答②	条件(D)	のとき／ならば	主張(C)	理由付け(W)	特徴
1	コ 差があってもその差が十分に小さい	⇒	サ 数学的に同じ	差が0.00...となり、差が十分に小さいから	条件が理由に。
2	コ	⇒	サ	差が十分小さいと同じとするから	循環論法
3	コ	⇒	サ	差が十分小さいと同じとするから	循環論法
4	コ	⇒	サ	差が十分小さいと同じとするから	循環論法
5	エ 0.99...と1は同じ	⇒	サ	$x = 0.99... \dots$ において方程式を解くと、 $0.99... = 1$ となるから	事実・事例の提示
6	ア 0.99...と1がある	⇒	サ	9が無数に続くと同じと見なせるから	循環論法
7	ア	⇒	ウ 1の方が大きい	現実的に考えて、1の方が大きいから	主張や結論が理由に。
8	ア	⇒	エ 0.99...と1は同じ	$x = 0.99... \dots$ において方程式を解くと、 $0.99... = 1$ となるから	事実・事例の提示
9	ア	⇒	ソ 同じとみなす	$1/3 = 0.33... \dots$ であり、3倍すると、 $1 = 0.99... \dots$ となるから	事実・事例の提示
10	ウ 1の方が大きい	⇒	カ 差を求める	差があると認めて、初めて差を求めることができるから	循環論法

同じ学習、同じコミュニケーション過程に参加し構成した知識・概念であるにもかかわらず、同じ条件ア(D)で主張(C)が異なるものが4個あり、主張サ(C)が同じ(6個)で条件(D)が異なるものがある(4個、1個、1個)あることが確認できる。

前述した通り、同じ条件(D)でも理由付け(W)が異なれば導出される主張(C)は異なる場合があるのが前述の4つである。実際、該当の4回答の理由付け

(D) はすべて異なっており、同じ条件 (D) から異なる主張が導かれることは調査からも明らかとなった。

数学に関わる知識・概念であれば、一般的には、主張 (C) が同一のとき、それを導き得る条件 (D) は人に依らず同じと想像されるのが自然である。6 人中 4 人が同じ推論「コ ⇒ サ」を選択していることもそれを支持している。主張 (C) としてサを選択している人たちの中で、条件 (D) として多くの人と異なるエヤアを選択している人はそれぞれ異なる理由付け (W) を認識しており、その条件 (D) と理由付け (W) との組み合わせから、結果として同じ主張 (C) を捉えていると、これらの例から確認できた。

c. 講座で構成した知識・概念 2

講座の最終段階で「数直線の切断や連続」について講義を行った。その段階で構成した知識・概念について、調査表の 4③で問うた。その結果が表 3 である。

表 3：調査表 4③の回答結果（要約）

回答③	条件 (D)	のとき/ ならば	主張 (C)	理由付け (W)	特徴
1	オ 数直線の切断を 考える	⇒	コ どこを切っても一つの数 があり、その数はどちら かの端点として出現する	すべての数は唯一つ存在し、その数 が数直線を構成するから	講義の前提2
2	オ	⇒	コ	すべての数は唯一つ存在し、その数 が数直線を構成するから	講義の前提2
3	オ	⇒	コ	異なるけれども、値としては同じ大き さをもつ数が存在するから	講義の前提1
4	オ	⇒	コ	異なるけれども、値としては同じ大き さをもつ数が存在するから	講義の前提1
5	タ 実数の直線がある	⇒	コ	すべての数は唯一つ存在し、その数 が数直線を構成するから	講義の前提2
6	シ 点、点からなる 直線がある	⇒	セ 有理数からなる 直線がある	稠密を考慮することで 導くことができるから	条件と主張の共通性を指摘 ※類推的な発想
7	キ 数で埋め尽く されている	⇒	セ	稠密を考慮することで 導くことができるから	間違った言明 逆なら正しい
8	セ 有理数からなる 直線がある	⇒	ウ 穴があく	稠密の特徴から	数学世界での議論
9	コ どこを切っても一つの数 があり、その数はどちら かの端点として出現する	⇒	サ どこを切っても一つの数 があり、その数は端点の いずれにも出現しない	どこを切っても数があるから	条件と主張が矛盾 (支離滅裂)
10	オ 数直線の切断を 考える	⇒	ケ どこを切っても一つの数 があり、その数は両方の 端点に出現する	すべての数は唯一つ存在し、その数 が数直線を構成するから	間違った言明

表 3 にあるように、条件 (D)、主張 (C) とともに同じ推論が 10 個中 4 個 (6 人中 4 人) あった。この推論は、講座で講義した内容でも中心的なものであり、6 人中 4 人に意識されていたのは妥当に思える。ただし、講座ではその推論を支えるための理由としては前提を

2 つ確認し、その 2 つの前提の上でその推論を講義していたが、理由付け (D) として表されていたのは、4 人も 2 つの前提の内どちらか一方だけであった。

また、その 4 つの推論以外の他の 6 つは、主張 (C) が同じ回答③ 6 と 7 を除いて、条件 (D) と主張 (C) がすべて異なっており、同じコミュニケーション過程での学習にもかかわらず、学習者で構成され、強く認識している知識・概念は学習者ごとに異なることがここでも明らかとなった。

他にも、数学的な知識・概念かつ数学を一般の人よりも注力して学習してきた数学系の院生であるにもかかわらず、数学的に間違った言明であったり、理由付け (D) が類推的な説明に留まる弱い正当性で論証を表現していたり、そもそも条件 (D) と主張 (C) が矛盾していて言明自体が支離滅裂であったりした。数学的な知識・概念、そして、同一のコミュニケーション過程による学習であっても、各学習者が構成する知識・概念は客観的なものとは言えず、主観的で個人的なものであることが、論理的な主張のレイアウトによる記述で確認された。

IV. まとめと今後の課題

数学の学習で得られた知識・概念を記述する枠組みを構築し、その枠組みを適用して、その枠組みの可能性を確認することが、本稿の研究目的であった。

トールミンモデルの構成要素について名称とその適用範囲を柔軟に修正することで、数学の学習過程において適用しやすくした「論理的な主張のレイアウト」を提案したことが成果の一つである。

「論理的な主張のレイアウト」を用いて数学の問題解決過程を分析したとき、数学の問題解決であるために、理想的には、条件 (D) は固定的、準客観的に共有され、そこから主張 (C) も固定的、準客観的に導出されると考えれば、「条件 (D) ⇒ 主張 (C)」の推論は同じ学習過程、同じコミュニケーション過程に参画する学習者たちにおいては同一のものと想定される。理由付け (W) においても、学習や解決の過程において集団の中で顕在化した根拠であれば、他者と共通となり準客観的な様相を持ちやすい。しかしながら、理由付け (W) には学習者自身の主導権が大いに存在し、他者と共有した理由だけでなく学習者自身によって理解された理由が理由付け (W) として採用される可能性もある。それ故、数学的な推論における論証におい

でも、理由付け (D) において学習者主体の様相が大きくなり、個人的で主観的な様相を呈する可能性をもつと説明できる。

実際、アンケート調査をして「論理的な主張のレイアウト」で構成した知識・概念を表現してもらったところ、次の特徴などが確認された。

- ・同じ講義・同じコミュニケーション過程でも、学習者が構成する「条件 (D)・理由付け (W)・主張 (C)」は大きく異なる。
- ・条件 (D) が同じでも理由付け (W) が違えば主張 (C) が変わり、理由付け (W) が異なることで主張 (C) が同じでも条件 (D) が異なることがある。

これらの特徴からもわかるように、数学的な知識や概念であっても、学習者の構成する概念は客観的に一致するものではなく、主観的で個別的であることがあらためて明らかとなるとともに、その個別性・主観性を「論理的な主張のレイアウト」を用いることで可視化されたことがもう一つの成果である。

今後の課題としては、この「論理的な主張のレイアウト」を授業にどう組み込むか、そして、数学は客観的な体系であるにもかかわらず、学習者が構成する知識は主観的で個別的であることが明らかになったことから、数学の知識や概念の「(準)客観性」をどのように学習者に獲得させるか、当初の構成した知識・概念の個別性・主観性を考慮しつつ、誤りを修正し他者と共通理解するしくみをどう意図的に工夫するかが問題である。言い換えれば、構成的な学習と数学の厳密性をどう両立させるかについて考察する。その際、学習者間の理解の差を埋め準客観的な知識・概念となりうるためコミュニケーションに、教師を含めすべての学習主体者がどのように当該の学習者に相互作用していくかの検討が必要と考えている。

加えて、本研究は6名の数学系大学院生を対象とした小規模調査であり、得られた知見を一般化するには慎重な検討も必要である。

その点を考慮したとき、まず調査対象の拡大と多様化が求められる。対象者数を増やし、学習背景や専攻の異なる学習者を含めることで、知識・概念の構成に見られた個別性が一般的傾向であるかを検証する必要がある。また、今回確認された条件 (D)・理由付け

(W)・主張 (C) の多様性が、既有知識や推論スタイル、メタ認知能力などの背景要因に由来する可能性がある。これらの要因を明らかにするため、事前テストや学習歴調査、インタビュー等を組み合わせた分析が今後の課題となる。

さらに、講座の進め方やコミュニケーション環境が結果に影響している可能性も否定できないため、別環境での再現性の検証が必要である。

以上の課題に取り組むことで、学習者が構成する数学的知識の主観性と個別性をより精緻に理解し、教育的支援のあり方を検討するための基盤が整うと考えられる。

付記・謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP25K06150 の助成を受けたものである。

アンケート調査に協力してくれた大学院生6名のみなさまに感謝申し上げます。

文献

- 福澤一吉 (2002) :『議論のレッスン』, 日本放送出版協会.
- 国立教育政策研究所 (2025), 『令和7年度全国学力・学習状況調査 解説資料 中学校数学』, 国立教育政策研究所教育課程研究センター.
- 戸田山和久 (2022) :『最新版 論文の教室』, NHK 出版.
- 渡部竜也 (2023) : 社会科におけるツールミンモデルの継承と課題, 東京学芸大学紀要人文社会科学系, 74, pp.53-82.

【巻末資料／アンケート調査票】

「数学講座」受講アンケート

現在、私は数学の知識・概念の構成・理解に関わる論拠研究に取り組んでいます。つきましては、本講座で得た考えについて、その納得の様子を教えてくださいたいと思います。
 次のことをお約束しますので、問題がなければアンケートにご協力ください。※回答をもって、参加の同意を得たものとさせていただきます。
 答えにくい質問があれば、次の質問に進んで構いません。そして、途中で止めても構いません。アンケートで、わからないことや心配なことがあれば、遠慮なく授業者に聞いてください。ご協力をよろしくお願いします。

[所用時間] 8分程度(見込み)

【プライバシー・ポリシー】

この調査では、みなさんのプライバシーを尊重し、個人情報取り扱いに十分配慮するとともに、入手した情報については適切に管理いたします。
 ・集めた情報は統計的に処理することを基本とし、個人について言及することはありません。
 ・個人情報が流出したり、個人が特定される形で情報を公開したりすることはありません。
 ・研究終了後、この調査用紙はシュレッダにかけて廃棄いたします。

<問い合わせ先>
 愛媛大学教育学部 吉村 直道 (数学教育学)
 E-mail: naomichi@ehime-u.ac.jp

【調査内容】

1 講座の内容や説明はわかりやすかったですか？ 5段階で評価し、 を記入してください。

1	2	3	4	5
わかりにくい				たいへんわかりやすい

2 講座の内容は面白い、興味ぶかいものでしたか？ 5段階評価。

1	2	3	4	5
面白くない				たいへん面白い

3 講座に参加した満足度はいかがでしたか？ 5段階評価。

1	2	3	4	5
不満				たいへん満足

[ウラ面があります]

② レジュメ見出し①と② この2つのブロックで最終的に得た知識・概念を、指定された構造で1つ以上2つまで教えてください。

語群

ア：9が限りなく続く0.999…と1がある	イ：9が限りなく続く0.999…と1がない
ウ：1の方が大きい	エ：0.999…と1は同じ
オ：1の方が小さい	カ：差を求めない
キ：差を求めない	ク：差が出ない
ケ：差が出る	コ：差があってもその差が十分に小さい
サ：数学的に同じ	シ：数学的に同じではない
ス：異なる	セ：異なる
ソ：同じとみなす	タ：同じとみなさない

回答1 () ⇒ ()
 その根拠 _____

回答2 () ⇒ ()
 その根拠 _____

③ レジュメ見出し④と⑤ この2つのブロックで最終的に得た知識・概念を、指定された構造で1つ以上2つまで教えてください。

語群

ア：数直線がある	イ：数直線がない	ウ：穴があく	エ：穴がない
オ：数直線の切断を考える	カ：数直線の切断を考えない	キ：数で埋め尽くされている	ク：数が存在しない所がある
ケ：数直線のどこを切っても一つの数があり、その数は両方の端点に出現する	コ：数直線のどこを切っても一つの数があり、その数はどちらかの端点として出現する	サ：数直線のどこを切っても一つの数があり、その数は端点のいずれにも出現しない	シ：点、点からなる直線がある
ス：点、点からなる直線がない	セ：分数で表される数からなる直線がある	ソ：分数で表される数からなる直線がない	タ：実数の直線がある
チ：実数の直線がない			

回答1 () ⇒ ()
 その根拠 _____

回答2 () ⇒ ()
 その根拠 _____

これで終了です、ありがとうございました。

4 この講座を受けてどんな知識・概念を理解したかを「条件 ⇒ 主張」の形式で問います。条件と主張については、自分で下記の語群から該当するものを自由を選んで回答するか、ふさわしいものがない場合は自由に記述して教えてください。同じ語を、同一の回答内や複数の質問・回答内で、条件と主張に繰り返し使っても構いません。
 理由については、そう考える根拠を記述してください。
 記号「⇒」は、「ならば」や「のとき」と、読みかえて判断してください。

【参考例】 語群：
 ア ソクラテスは人間である イ 人間はソクラテスである
 ウ ソクラテスは死ぬ エ ソクラテスは死なない

回答例 (ア) ⇒ (ウ)
 その根拠 人間は必ず死ぬから

レジュメの見出しごと、そのタイミングでどんな知識・概念を理解したかを問います。

① レジュメ見出し① このブロックで最終的に得た知識・概念を、指定された構造で1つ以上2つまで教えてください。

語群

ア：すき間や切断がない	イ：すき間や切断がある
ウ：つながっている／連続である	エ：つながっていない／連続でない
オ：点、点がある	カ：点、点がない

回答1 () ⇒ ()
 その根拠 _____

回答2 () ⇒ ()
 その根拠 _____